الرياضيات

- مقاييس النزعة المركزية
- المعاينة وتوزيعات المعاينة
- مقاييس التشتت
- الزمر
- التكامل غير المحدد

هبة نصر قعدان





www.darsafa.net

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات

الرياضيات

- مقاييس النزعة المركزية
- المعاينة وتوزيعات المعاينة
- مقاييس التشتت
- الزمر
- التكامل غير المحدد

هبة نصر قعدان

الطبعة الأولى
2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (453/ 1/ 2011)

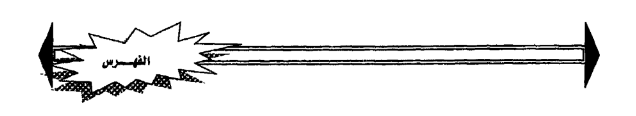
510
قعدان، هبة نصر
الرياضيات: مقاييس النزعة المركزية/ هبة نصر قعدان. ـ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع 2011.
( ) ص
ر. أ: 2011/1/453
الواصفات: //الرياضيات//

الطبعة الأولى

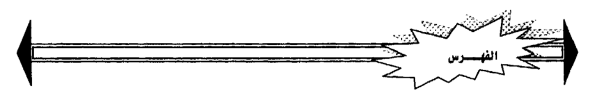
2014م – 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع
عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص. ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن
DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net
ISBN 978-9957-24-710-2 ردمك



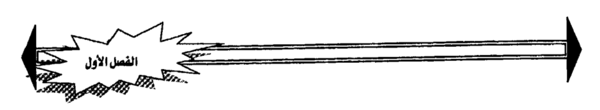
الفهرس





مقاييس النزعة المركزية

Measures of central tendency



الفصل الأول

مقاييس النزعة المركزية

Measures of central tendency

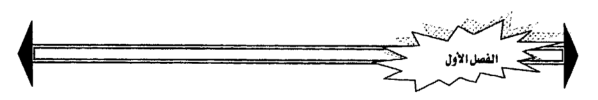
إن عملية تكوين جدول تكراري ورسمه هي الخطوة الأولى لعرض وتلخيص البيانات المعطاة للحصول على معلومات أولية عن هذه البيانات لكنها غير كافية ويكون من الضروري أن نبحث عن طرق أخرى تفيد في الحصول على معلومات وخصائص أخرى لهذه البيانات تمكننا من التعبير عن هذه الخصائص بواسطة أرقام يسهل التعامل معها وتمكنا من عمل المقارنات بين هذه البيانات وأخرى.

ومن بين هذه الخصائص وأكثرها أهمية خاصية التمركز أو التوسط. فبالنظر إلى مفردات أي ظاهرة نلاحظ أن غالبية هذه المفردات تتراكم حول قيمة ما تسمى بمتوسط أو مركز الظاهرة ثم يتناقص عدد المفردات بالتدريج كلما بعدت عن هذه القيمة المركزية إلى الجانبين وهذا التراكم أو التمركز هو ما يطلق عليه النزعة المركزية أي ميل البيانات إلى التمركز حول قيمة معينة هي القيمة المتوسطة وتشير خاصية التمركز أو النزعة المركزية إلى موقع التوزيع أو الجزء الأوسط منه وهناك خاصية أخرى هي خاصية تشتت أو تباعد البيانات فهي تشير إى اختلاف أو انتشار البيانات.

وفي هذا الفصل سوف نركز على دراسة الخاصية الأولى وهي خاصية النزعة المركزية ويوجد لهذه الخاصية عدة أنواع من المقاييس شهيرة الاستخدام نذكر منها ما يلي:

١- الوسط الحسابي والوسط الحسابي المرجح.





٢- الوسيط، الربعيات، العشيرات، والميئينات.

٣- المنوال.

٤- الوسط الهندسي (G.M).

٥- الوسط التوافقي (H.M).

وتأتي شهرة هذه المقاييس من كونها سهلة الاستخدام والفهم ويمكن تناولها بصور رياضية سهلة هذا ويرى الإحصائيين أن هناك خواص وشروط معينة للمقياس الجيد نذكر منها:

١. أن يكون المقياس واضح التعريف وبالتالي يمكن أن يستخدمه أناس مختلفون.

٢. أن يعتمد في قياسه على كل البيانات المعطاة.

٣. يتأثر بالمتغيرات التي تحدث في المجموعة أو العينة تحت الدراسة.

٤. يسهل استخدامه في العمليات الرياضية.

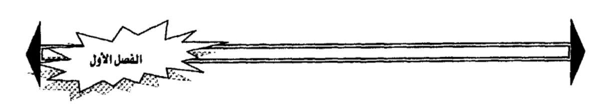
٥. يمكن تمثيله بيانياً.

٦. أن يكون مستقر لجميع العينات المتشابهة بمعنى أنه إذا طبق على عينات متشابهة فلا بد أن تكون له نفس القيمة.

*** الوسط الحسابي Arithmetic Mean**

تعتمد طريقة حساب الوسط الحسابي على نوعية البيانات سواء كانت بيانات خام Data Raw أي بيانات مفردة أو بيانات ذات مجموعات Grouped Data.





أولاً: بيانات خام Raw Data

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات الخام $س_1$، $س_2$،...، $س_ن$ عددها ن فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو مجموع هذه البيانات على عددهم ويصاغ ذلك بالقانون الآتي:

$$\overline{س} = \frac{س_1 + س_2 ... + س_ن}{ن}$$

وتكتب بصورة مختصرة كالآتي: $\overline{س} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} س_ي$

مثال (١):

أوجد الوسط الحسابي لمجموعة درجات الإحصاء والتي حصل عليها (١٠) طلاب في أحد الامتحانات لمادة ١٠١ إحص وهي كالآتي ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ٢٠، ١١، ١٣، ١٦، ١٨.

الحل:

بفرض أن $\overline{س}$ هو الوسط الحسابي لهذه المجموعة وبالتالي فإن:

$$\overline{س} = \frac{١٣+١٤+١٥+١٨+١٩+٢٠+١١+١٣+١٦+١٨}{١٠}$$

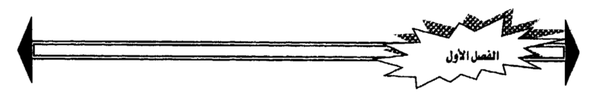
ثانياً: الوسط الحسابي لبيانات ذات تكرار

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات $س_1$، $س_2$، ...، $س_م$ ولها التكرارات المناظرة $ق_1$، $ق_2$،...، $ق_م$ على الترتيب بحيث أن $ق_1 + ق_2 + ... + ق_م = ن$

فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو $\overline{س}$ ويعطى بالصورة الآتية:

$$\overline{س} = \frac{ق_1 س_1 + ق_2 س_2 + ... + ق_م س_م}{ن}$$





وتكتب بصورة مختصرة كالآتي: $\bar{س} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} ق_ي س_ي$

مثال (٢):

إذا كانت درجات (٣٠) طالب من طلاب الجامعة الهاشمية في أحد امتحانات مادة ١٠١ إحصِ وهي كالآتي:

الدرجات	٢٢	٢٨	٣٠	٣٥	٣٨	٤٠	٤٥
عدد الطلاب	٧	٥	٤	٦	٣	٣	٢

أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الحل:

بفرض أن س تمثل الدرجات وأن التكرار المناظر لها هو ق وبتكوين الجدول الآتي فإن: وبإيجاد القيم الناتجة من هذا الجدول فإن $\sum ق_ي س_ي = ٩٤٨$ كذلك فإن $\sum ق_ي = ٣٠$ وبالتالي يمكن حساب الوسط الحسابي كالآتي:

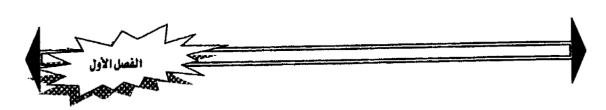
الدرجات س	التكرار ق	ق س
٢٢	٧	١٥٤
٢٨	٥	١٤٠
٣٠	٤	١٢٠
٣٥	٦	٢١٠
٣٨	٣	١١٤
٤٠	٣	١٢٠
٤٥	٢	٩٠
المجموع	٣٠	٩٤٨

$\bar{س} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} ق_ي س_ي$

$\bar{س} = \frac{٩٤٨}{٣٠} = ٣١,٦$

وتسمى هذه





الطريقة بالطريقة المباشرة أو المطولة Direct Method وهي تلك الطريقة التي تقوم بحساب الوسط الحسابي من القيم المعطاة المباشر.

أما إذا أردنا تبسيط البيانات المعطاة فيمكن لنا استخدام الطريقة المختصرة Short Method وهي طريقة تعتمد على طرح مقدار ثابت من البيانات ثم إضافة هذا المقدار الثابت إلى الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الجديدة ليعطي الوسط الحسابي للبيانات قبل عملية الطرح. ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا مجموعة من القيم هي $س_١$، $س_٢$،....، $س_م$ بتكرارات $ق_١$، $ق_٢$،...، $ق_م$ ولها الوسط الحسابي $\overline{س}$ وبطرح عدد ثابت أ يسمى الوسط الفرضي لجميع القيم المعطاة فإن القيم الجديدة تكون على الشكل الآتي:

$$د_١ = س_١ - أ ، د_٢ = س_٢ - أ ،.....، د_م = س_م - أ$$

وبالتالي فإن الوسط الحسابي لهذه المجموعة الجديدة هو $\overline{ص}$

ويعطى بالصورة:

$$\overline{ص} = \frac{١}{ن} [ق_١د_١ + ق_٢د_٢ + ... + ق_مد_م]$$

$$\overline{ص} = \frac{١}{ن} [ق_١ (س_١ - أ) + ق_٢ (س_٢ - أ) + ... + ق_م (س_م - أ)]$$

$$\overline{ص} = \frac{١}{ن} [(ق_١س_١ + ق_٢س_٢ + ... ق_مس_م) ن أ)]$$

$$\overline{ص} = \overline{س} - أ \Leftarrow \overline{س} = \overline{ص} + أ.$$

أي أن الوسط الحسابي لمجموعة البيانات القديمة $\overline{س}$ هو عبارة عن الوسط الحسابي للمجموعة الجديدة مضافاً إليه العدد الثابت أو الوسط الفرضي أ.



ثالثاً: الوسط الحسابي لبيانات مبوبة

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات المبوبة ويتكون الجدول التكراري لها من م من المجموعات فإننا نستعيض عن كل مجموعة بمركزها ليكون لدينا $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ....، $س_م$ هي عدد م من المراكز ولها التكرارات المناظرة $ق_١$، $ق_٢$، $ق_٣$، ....، $ق_م$ ثم نقوم بحساب الوسط الحسابي كما سبق بضرب المراكز في التكرارات المناظرة وقسمة الناتج على مجموع التكرارات والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال (٣):

أوجد الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الآتية:

المجموعة	١١٠-١١٩	١٢٠-١٢٩	١٣٠-١٣٩	١٤٠-١٤٩	١٥٠-١٥٩	١٦٠-١٦٩
التكرار ق	١٠	٨	٤	٣	٢	٣

الحل:

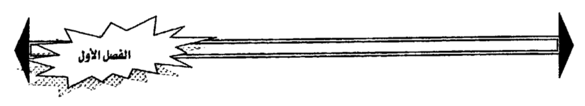
بإيجاد مراكز المجموعات السابقة فإن الوسط الحسابي باستخدام الطريقة المباشرة هو: $\bar{س} = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{م} ق_ي \, س_ي$

$$\bar{س} = \frac{١}{٣٠}[١٠(١١٤,٥) + ٨(١٢٤,٥) + ٤(١٣٤,٥) + ٣(١٤٤,٥) + ٢(١٥٤,٥) + ٣(١٦٤,٥)]$$

$$= \frac{٣٩١٥}{٣٠} = ١٣٠,٥$$

مثال (٤):

حل المثال السابق باستخدام الطريقة المختصرة.



الحل:

بإيجاد مراكز المجموعات واختيار القيمة التي تتوسطهم كوسط فرضي فنجدها $أ = ١٣٤,٥$ وبتكوين الجدول الآتي:

المجموعات	التكرار ق	المركز س	د = س − أ	قد
١١٠-١١٩	١٠	١١٤,٥	-٢٠	-٢٠٠
١٢٠-١٢٩	٨	١٢٤,٥	-١٠	-٨٠
١٣٠-١٣٩	٤	١٣٤,٥	٠	٠
١٤٠-١٤٩	٣	١٤٤,٥	١٠	٣٠
١٥٠-١٥٩	٢	١٥٤,٥	٢٠	٤٠
١٦٠-١٦٩	٣	١٦٤,٥	٣٠	٩٠
المجموع	٣٠			-١٢٠

وبالتالي فإن الوسط الحسابي المطلوب هو:

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ي=١}^{م} ق_ي د_ي}{ن} \quad \Leftarrow \quad \bar{س} = ١٣٤,٥ + \frac{-١٢٠}{٣} = ١٣٠,٥$$

ملحوظة: إذا قمنا بقسمة كل من $د_١ = س_١ - أ$، $د_٢ = س_٢ - أ$، .... ، $د_م = س_م - أ$ على عدد ثابت وليكن هـ وهو في الغالب يكون طول المجموعة فإن القيم الجديدة لها الشكل الآتي:

$$\dot{د}_١ = \frac{س_١ - أ}{هـ} ، \dot{د}_٢ = \frac{س_٢ - أ}{هـ} ، ..... ، \dot{د}_م = \frac{س_م - أ}{هـ}$$

وتكون العلاقة بين الوسط الحسابي للقيم الجديدة والقيم القديمة هي:



$\overline{س} = أ + \frac{\sum_{ي=1}^{م} ق_ي د_ي}{ن} . هـ$ وتسمى الطريقة التي تستخدم هذه الصيغة بالطريقة المختزلة.

مثال (٥):

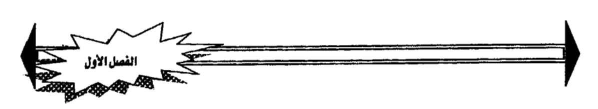
باستخدام الطريقة المختزلة، أوجد الوسط الحسابي للبيانات في المثال السابق.

الحل: بقسمة العمود الرابع في الجدول السابق على طول المجموعة هـ = ١٠ فإن الناتج يكون:

المجموعات	التكرار ق	المراكز س	$د = \frac{س-أ}{هـ}$	ق د
١١٠-١١٩	١٠	١١٤,٥	-٢	-٢٠
١٢٠-١٢٩	٨	١٢٤,٥	-١	-٨
١٣٠-١٣٩	٤	١٣٤,٥	٠	٠
١٤٠-١٤٩	٣	١٤٤,٥	١	٣
١٥٠-١٥٩	٢	١٥٤,٥	٢	٤
١٦٠-١٦٩	٣	١٦٤,٥	٣	٩
المجموع	٣٠			-١٢

ويكون الوسط الحسابي في هذه الحالة هو $\overline{س} = أ + \frac{\sum_{ي=1}^{م} ق_ي د_ي}{ن} . هـ$

$\overline{س} = ١٣٤,٥ + \frac{-١٢}{٣٠} (١٠) ١٣٠,٥$



ويمكن القول بأن الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات هو تلك القيمة التي إذا أعطيت لكل بينة من البيانات لكان مجموع هذه القيم مساوي للمجموع الفعلي للبيانات الأصلية.

❖ **بعض خصائص الوسط الحسابي**

١. إذا كانت جميع القيم $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ....، $س_م$ متساوية وتساوي عدد ثابت $أ$ فإن $\overline{س}=أ$.

٢. إذا كان لدينا مجموعة من البيانات المبوبة مراكزها هي $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ....، $س_م$ ولها التكرارات المناظرة $ق_١$، $ق_٢$، $ق_٣$، ....، $ق_م$ وكان $\overline{س}$ وسطها الحسابي وكانت لدينا العلاقة $ي=١،٢،٣،...،م$، $ص_ي = أس_ي + ب$ حيث كل من $أ$، $ب$ ثوابت حقيقية فإن الوسط الحسابي للبيانات الجديدة $ص_١$، $ص_٢$، $ص_٣$، ....، $ص_م$ هو $\overline{ص}=أ\overline{س}+ب$.

البرهان:

١. باستخدام التعريف الأساسي للوسط الحسابي فإن:

$$\overline{س}=\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} س_ي = \frac{١}{ن}(أ+أ+...+أ) = \frac{ن أ}{ن}= أ .$$

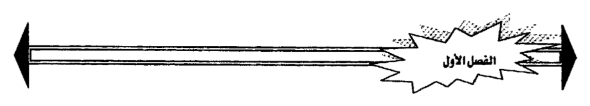
٢. بإيجاد الوسط الحسابي للبيانات $ص_١$، $ص_٢$، $ص_٣$، ....، $ص_م$ فإن:

$$\overline{ص}=\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{م} ق_ي ص_ي \quad ، \quad ن=\sum_{ي=١}^{م} ق_ي$$

$$=\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{م} ق_ي (أس_ي + ب)$$

$$=\frac{١}{ن}(أ\sum_{ي=١}^{م} ق_ي س_ي + ب\sum_{ي=١}^{م} ق_ي)$$





وباستخدام أن: $ن = \sum_{ي=1}^{م} ق_ي$ فإن $\overline{ص} = أ\overline{س} + ب$

❖ الوسط الحسابي المرجح

إذا كان $و_1$، $و_2$، $و_3$، ...، $و_م$ هي أوزان القيم $س_1$، $س_2$، $س_3$، ...، $س_م$ على الترتيب فإن المتوسط المرجح لهذه القيم هو:

$$\overline{س}_و = \frac{و_1 س_1 + و_2 س_2 + ... + و_م س_م}{و_1 + و_2 + ... + و_م}$$

$$= \frac{\sum_{ي=1}^{م} و_ي س_ي}{\sum_{ي=1}^{م} و_ي}$$

مثال (٦):

الجدول الآتي يمثل النسب المئوية لنتائج أحد الطلاب والأوزان لهذه النسب في الفصل الدراسي الأول:

المادة	الدرجات	الوزن
الإنجليزية	٧٠	٣,٥
الإحصاء	٨٥	٤,٥
الاقتصاد	٧٥	٣,٥
الأحياء	٨٠	٤
الفيزياء	٦٥	٢,٥

أوجد الوسط الحسابي المرجح لهذه الدرجات؟



الحل:

نكون الجدول الآتي:

المادة	الدرجات س	الوزن و	وس
الإنجليزية	٧٠	٣,٥	٢٤٥
الإحصاء	٨٥	٤,٥	٣٨٢,٥
الاقتصاد	٧٥	٣,٥	٢٦٢,٥
الأحياء	٨٠	٤	٣٢٠
الفيزياء	٦٥	٢,٥	١٦٢,٥
		$\sum_{ي=1}^{5} و_ي = ١٨$	$\sum_{ي=1}^{5} و_ي س_ي = ١٣٧,٥$

❖ **الوسط الحسابي المرجح هو:**

$$\bar{س}_و = \frac{\sum_{ي=1}^{م} و_ي س_ي}{\sum_{ي=1}^{ر} و_ي} \quad ، \quad \bar{س}_و = \frac{١٣٧٢,٥}{١٨} = ٧٦,٢٥$$

❖ **الوسط الحسابي المشترك Combined Mean**

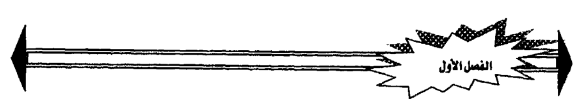
إذا كان لدينا مجموعتان لهما الحجم $ن_1$، $ن_2$ الوسط الحسابي $\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$ على الترتيب فإن الوسط الحسابي المشترك لهما هو:

$$\bar{س} = \frac{ن_1 \bar{س}_1 + ن_2 \bar{س}_2}{ن_1 + ن_2}$$

مثال (٧):

إذا كان لدينا مجموعتان من الطلاب لهما الحجم ١٥، ٢٠ الوسط الحسابي





لكل من أوزانهم هو ٦٠كغم، ٧٥كغم على الترتيب فأوجد الوسط الحسابي المشترك لهما.

الحل:

الوسط الحسابي المشترك هو:

$$\bar{س} = \frac{ن_١ \bar{س}_١ + ن_٢ \bar{س}_٢}{ن_١ + ن_٢} = \frac{١٥(٧٥) + ٢٠(٦٠)}{١٥ + ٢٠} = ٦٦,٤٣ \text{ كغم}$$

**** مميزات الوسط الحسابي:***

١. مقياس يسهل حسابه ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.

٢. يستخدم في حسابه جميع القيم محل الدراسة.

٣. أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء.

٤. هو أكثر المقاييس استقراراً.

**** عيوب الوسط الحسابي:***

١. يتأثر بالقيم الكبيرة والصغيرة.

٢. يصعب حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

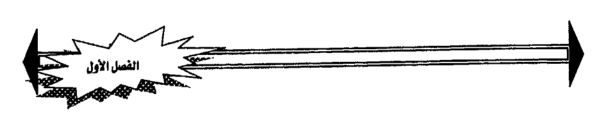
٣. يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية.

**** الوسيط Median***

أولاً: حساب الوسيط لبيانات غير مبوبة

إذا كان لدينا ن من القيم لظاهرة ما ومرتبة حسب قيمة كل منها سواء كان الترتيب تصاعدي أو تنازلي كالآتي: $س_١$، $س_٢$، ....، $س_م$ فإن:





أ) إذا كانت ن فردية فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في الترتيب رقم $\frac{\text{ن}+١}{٢}$،

أي أن الوسيط $= \text{س}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}}$

ب) إذا كانت ن زوجي فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين تقعان في الترتيب رقم $\frac{\text{ن}}{٢}$ و $\frac{\text{ن}}{٢}+١$ أي أن:

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{س}_{\frac{\text{ن}}{٢}} + \text{س}_{\frac{\text{ن}}{٢}+١}}{٢}$$

مثال (٨):

أوجد الوسيط للقيم الآتية: -٥، ٤، ١٣، ٠، ٣، -٢، ١٠

الحل:

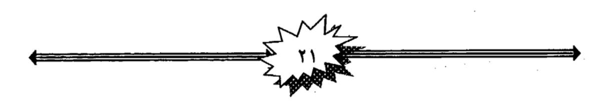
بترتيب هذه القيم تصاعدياً فإن -٥، -٢، ٠، ٣، ٤، ١٠، ١٣ وعدد هذه القيم هو ن = ٧ عدد فردي وبالتالي فإن الوسيط يقع في المرتبة ٤$=\frac{٧+١}{٢}$ أي أن الوسيط هو = ٣.

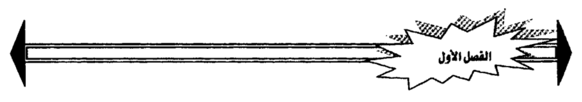
مثال (٩):

أوجد الوسيط للقيم الآتية: ١٢، -٦، ٣، ٠، ١٣، ٤، -٥، ٧، ٢٠، ٨

الحل:

بترتيب هذه القيم تصاعدياً فإن -٦، -٥، ٠، ٣، ٤، ٧، ٨، ١٢، ١٣، ٢٠ وعدد هذه القيم هو ن = ١٠ وهو عدد زوجي وبالتالي فإن الوسيط هو الوسط





الحسابي للقيمتين الواقعتين في المرتبتين رقم $\frac{١٠}{٢}=٥$ و $\frac{١٠}{٢}+١=٦$ أي أن الوسيط هو $\frac{٤+٧}{٢}=٥,٥$.

ثانياً: حساب الوسيط لبيانات مبوبة:

في هذه الحالة تعطي البيانات في جداول تكرارية ذي مجموعات ولحساب الوسيط في مثل هذه الحالات يتم عمل الآتي:

١. إيجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل (وهو ما يناظر ترتيب البيانات في حالة البيانات غير المبوبة).

٢. نوجد ترتيب الوسيط وهو $\frac{ن}{٢}$ سواء كان ن زوجية أو فردية.

٣. نحدد المجموعة الوسيطية أي التي يقع فيها الوسيط.

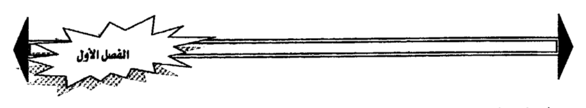
٤. نحدد البداية الفعلية للمجموعة الوسيطة ولتكن أ.

٥. نحدد التكرار المتجمع السابق للمجموعة الوسيطية وليكن $ق_١$ وكذلك التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الوسيطية وليكن $ق_٢$.

نعوض في القانون الوسيط $= أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ$

حيث هـ هي طول المجموعة الوسيطية.





مثال (١٠):

الجدول الآتي يمثل درجات ٥٠ طالب في الإحصاء، أوجد الوسيط.

الدرجات	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩
عدد الطلاب	٥	٨	١٠	١٥	٩	٣

الحل:

١. نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالآتي:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل الحدود الدنيا للمجموعة
٠	أقل من ١٩,٥
٥	أقل من ٢٤,٥
١٣	أقل من ٢٩,٥
٢٣	أقل من ٣٤,٥
٣٨	أقل من ٣٩,٥
٤٧	أقل من ٤٤,٥
٥٠	أقل من ٤٩,٥

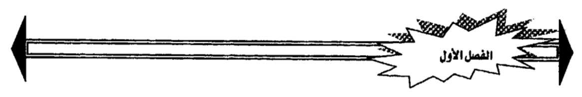
٢. نوجد ترتيب الوسيط وهو $\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

٣. نحدد المجموعة الوسيطية أي التي يقع فيها الوسيط وهي ٣٤,٥ = ٣٩,٥

٤. نحدد البداية الفعلية للمجموعة الوسيطية وهي أ = ٣٤,٥

٥. نحدد التكرار المتجمع السابق للمجموعة الوسيطية وهو $ق_١$ = ٢٣ وكذلك التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الوسيطية وهو $ق_٢$ = ٣٨.





٦. نعوض في القانون الآتي:

$$\text{الوسيط} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ$$

$$\text{الوسيط} = ٣٤,٥ + \frac{٢٥ - ٢٣}{٣٨ - ٢٣} (٥)$$

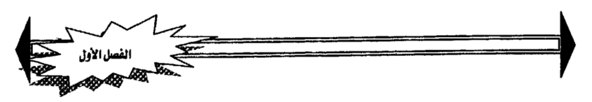
$$= ٣٥,١٧$$

* ملحوظة: يمكن للقارئ أيضاً استخدام الجدول التكراري المتجمع النازل عوضاً عن الجدول التكراري المتجمع الصاعد وبنفس الخطوات يعطي نفس قيمة الوسيط.

* *حساب الوسيط بيانياً:*

نقوم برسم المنحنى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نحدد ترتيب الوسيط كما في المثال السابق وهو $\frac{ن}{٢}$ ثم نقوم بإسقاط عمود من عند النقطة $ص = \frac{ن}{٢}$ على المحور الرأسي (محور التكرارات المتجمعة) ليلاقي المنحنى في نقطة نسقط بعدها عمود من هذه النقطة الموجودة على المنحنى عمود آخر على المحور الأفقي (محور المجموعات) ليلقيه في نقطة تكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط.

طريقة أخرى: وهي رسم المنحنيات المنحنى المتجمع الصاعد والمنحى المتجمع النازل ليتلاقى معاً في نقطة، نسقط من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي ليلاقيه في نقطة تكون هذه النقطة هي الوسيط.



مثال (١١):

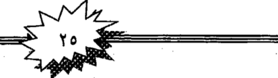
أوجد الوسيط بيانياً للبيانات الآتية:

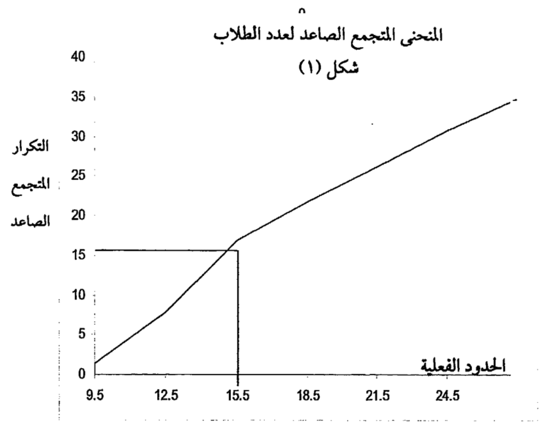
درجات الرياضيات	١٠-١٢	١٣-١٥	١٦-١٨	١٩-٢١	المجموع
عدد الطلاب	٥	١١	١٥	٤	٣٥

الحل:

أقل من الحدود الدنيا للمجموعة	التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب
أقل من ٩,٥	٠
أقل من ١٢,٥	٥
أقل من ١٥,٥	١٦
أقل من ١٨,٥	٣١
أقل من ٢١,٥	٣٥

وبرسم هذه القيم يكون المنحنى التكراري المتجمع الصاعد له الشكل الآتي:





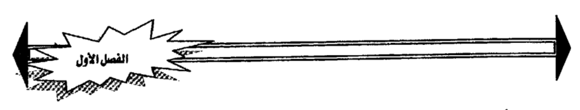
وبإسقاط عمود أفقي من عند النقطة المناظرة للتكرار $\frac{٣٥}{٢}$= ١٧,٥ على محور التكرار المتجمع الصاعد ليلاقي المنحنى في نقطة نسقط من هذه النقطة عمود آخر على محور المجموعات ليلاقيه عند القيمة ١٥,٩ وهي القيمة الوسيط (انظر شكل رقم ١).

***مميزات الوسيط**

١- مقياس لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

٢- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

٣- يمكن إيجاده بيانياً.



٤- يمكن إيجاده من بيانات وصفية يمكن ترتيبها كتقديرات الطلاب على سبيل المثال.

*** عيوب الوسيط**

١- لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.

٢- لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

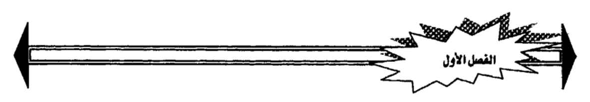
الربيعيات Quartiles العشيرات Deciles والمئينات Percentiles

١. الربيعيات Quartiles

عند حساب الوسيط وجدنا أنه القيمة التي تتوسط البيانات أو بطريقة أخرى هي القيمة التي تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى جزئين متساويين بالمثل فإن الربيعيات تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى أربعة أجزاء متساوية.

ويعرف الربيع الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويرمز له بالرمز $ر_١$ كذلك فإن الربيع الثاني هو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ويرمز له بالرمز $ر_٢$ وهو يساوي الوسيط. أما الربيع الثالث فهو الذي يسبقه ثلاثة أرباع البيانات ويرمز له بالرمز $ر_٣$. وطريقة حساب كل منهم تعتمد على تحديدنا لترتيب الربيع فالربيع الأول له الترتيب $\frac{ن}{٤}$ أما الربيع الثاني فله الترتيب $\frac{٢ن}{٤}$ أما الربيع الثالث فترتيبه هو $\frac{٣ن}{٤}$ حيث ن هي عدد البيانات المعطاة سواء كان فردياً





أو زوجياً، ثم نقوم بتحديد المجموعة الربيعية كما سبق في حساب الوسيط مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة ربيعية والتعويض في القانون:

$$ر_ي = أ + \frac{\frac{ي ن}{٤} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ \text{ ، } ي = ١، ٢، ٣.$$

$\frac{ي ن}{٤}$: ترتيب الربيع رقم ي، وحيث ن عدد البيانات.

أ: البداية الفعلية للمجموعة الربيعية.

$ق_١$: التكرار المتجمع السابق للمجموعة الربيعية.

$ق_٢$: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة الربيعية.

هـ: طول المجموعة الربيعية.

*** العشيرات *Deciles***

بالمثل فإن العشيرات تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى عشرة أجزاء متساوية وعدد هذه العشيرات هو تسعة عشيرات.

ويعرف العشير الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها عشر البيانات ويرمز له بالرمز $د_١$ كذلك فإن العشير الثاني هو القيمة التي يسبقها $\frac{٢}{١٠}$ من البيانات ويرمز له بالرمز $د_٢$ وهكذا فإن العشير الخامس هو الذي يسبقه $\frac{٥}{١٠}$ من البيانات وهو يساوي الوسيط أي أن الوسيط = $ر_٢$ = $د_٥$ بالمثل فإن العشير التاسع هو الذي يسبقه $\frac{٩}{١٠}$ من البيانات.

وطريقة حساب كل منهم تعتمد على تحديدنا لترتيب العشير فإذا كان عدد البيانات المعطاة هو ن فإن العشير الأول لـه الترتيب $\frac{ن}{١٠}$ أما العشير الثانيفلـه الترتيب $\frac{٢ن}{١٠}$ والعشير رقم ي فهو ترتيبه هـو $\frac{ين}{١٠}$ حيث ي = ١،٢،٣،....، ٩. ثم نقوم بتحديد المجموعة العشيرية كما سبق في حساب الوسيط والربيعيات مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة عشيرية والتعويض في القانون:

$$د_ي = أ + \frac{\frac{ين}{١٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ \text{ ، } ي = ١، ٢، ...، ٩.$$

$\frac{ين}{٤}$: ترتيب العشير رقم ي.

أ: البداية الفعلية للمجموعة العشيرية.

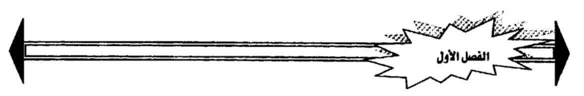
$ق_١$: التكرار المتجمع السابق للمجموعة العشيرية.

$ق_٢$: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة العشيرية.

هـ: طول المجموعة العشيرية.

*** /المئينات Percentiles**

كذلك فإن النقاط التي تقسم البيانات المرتبة سواء تصاعدياً أو تنازلياً إلى مائة جزء متساوي تسمي المئينات وعددها ٩٩ مئين. ويعرف المئين الأول بأنه تلك القيمة التي يسبقها ١٪ من البيانات ويرمز له بالرمز $م_١$ كذلك فإن المئين الثاني هو القيمة التي يسبقها ٢٪ من البيانات ويرمز له بالرمز $م_٢$ وهكذا فإن المئين الخامس والعشرون $م_{٢٥}$ هو الذي يسبقه ٢٥٪ من البيانات أي يساوي



الربع الأول وكذلك فإن المئين الخمسون $م_{٥٠}$ يسبقه ٥٠٪ من البيانات وهو يساوي الوسيط وبالتالي يكون لدينا العلاقات التالية:

الوسيط = $ر_٢$ = $د_٥$ $م_{٢٥}$ = $ر_١$، $م_{٧٥}$ = $ر_٣$

وبالتالي فإن المئين رقم ٩٩ يسبقه ٩٩٪ من البيانات، وطريقة حساب كل منهم كما سبق في حساب الوسيط والربيعيات والعشيريات مع اختلاف المسمى من مجموعة وسيطية إلى مجموعة مئينية والتعويض في القانون:

$$م_ي = أ + \frac{\frac{ي ن}{١٠٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ ، ي = ١، ٢، ... ، ٩٩.$$

$\frac{ي ن}{١٠٠}$: ترتيب المئين رقم ي.

أ: البداية الفعلية للمجموعة المئينية.

$ق_١$: التكرار المتجمع السابق للمجموعة المئينية.

$ق_٢$: التكرار المتجمع اللاحق للمجموعة المئينية.

هـ: طول المجموعة المئينية.

مثال (١٢):

احسب القيم $ر_١$، $ر_٢$، $د_٢$، $م_٥$، $م_{٩٠}$ من البيانات الآتية:

درجات الرياضيات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٠	٢٢	٢٥	١٠	٥	٨٠

الحل:

لدينا ن = ٨٠ هو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع





الصاعد كما يلي:

أقل من الحدود الدنيا للمجموعة	التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب
أقل من ٩,٥	٠
أقل من ١٩,٥	٨
أقل من ٢٩,٥	١٨
أقل من ٣٩,٥	٤٠
أقل من ٤٩,٥	٦٥
أقل من ٥٩,٥	٧٥
أقل من ٦٩,٥	٨٠

١. حساب $ر_١$ فإن ترتيبه هو $\frac{ن}{٤} = \frac{٨٠}{٤} = ٢٠$ وبالتالي فإن:

أ = ٢٩,٥ ، $ق_١$ = ١٨ ، $ق_٢$ = ٤٠ ، هـ = ١٠

وعليه $ر_ي = أ + \frac{\frac{ن}{٤} - ق_١}{ق_٢ - ق_١}.هـ$ أي أن $ر_١ = ٢٩,٥ + \frac{٢٠-١٨}{٤٠-١٨}(١٠) = ٣٠,٤$

٢. حساب $ر_٣$ فإن ترتيبه هو $\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣×٨٠}{٤} = ٦٠$ وبالتالي فإن:

أ = ٣٩,٥ ، $ق_١$ = ٤٠ ، $ق_٢$ = ٦٥ ، هـ = ١٠

$ر_٣ = أ + \frac{\frac{٣ن}{٤} - ق_١}{ق_٢ - ق_١}.هـ$ أي أن $ر_٣ = ٣٩,٥ + \frac{٦٠-٤٠}{٦٥-٤٠}(١٠) = ٤٧,٥$

٣. حساب $د_٢$ فإن ترتيبه هو $\frac{٢ن}{١٠} = \frac{٢×٨٠}{١٠} = ١٦$ وبالتالي فإن:

أ = ١٩,٥ ، $ق_١$ = ٨ ، $ق_٢$ = ١٨ ، هـ = ١٠



وعليه $د_٢ = أ + \frac{\frac{٢ن}{١٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١}.هـ$ أي أن $د_٢ = ١٩,٥ + \frac{١٦-٨}{١٨-٨}(١٠) = ٢٧,٥$

٤. حساب $م_٥$ فإن ترتيبه هو $\frac{٥ن}{١٠٠} = \frac{٥×٨٠}{١٠٠} = ٤$ وبالتالي فإن:

أ = ٩,٥ ، $ق_١ = ٠$ ، $ق_٢ = ٨$ ، هـ = ١٠

وعليه $م_٥ = أ + \frac{\frac{٥ن}{١٠٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١}.هـ$ أي أن $م_٥ = ٩,٥ + \frac{٤-٠}{٨-٠}(١٠) = ١٤,٥$

٥. حساب $م_{٩٠}$ فإن ترتيبه هو $\frac{٩٠ن}{١٠٠} = \frac{٩٠×٨٠}{١٠٠} = ٧٢$ وبالتالي فإن:

أ = ٤٩,٥ ، $ق_١ = ٦٥$ ، $ق_٢ = ٧٥$ ، هـ = ١٠

وعليه $م_{٩٠} = أ + \frac{\frac{٩٠ن}{١٠٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١}.هـ$ أي أن $م_{٩٠} = ٤٩,٥ + \frac{٧٢-٦٥}{٧٥-٦٥}(١٠) = ٥٦,٥$

مثال (١٣):

احسب القيم $ر_٢$، $د_٥$، $م_{٢٥}$ من البيانات الآتية:

درجات الرياضيات	١٥-١٦	١٧-١٨	١٩-٢٠	٢١-٢٢	٢٣-٢٤	المجموع
عدد الطلاب	٣	١٠	١٥	٩	٣	٤٠

الحل:

لدينا ن = ٤٠ هو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:

أقل من الحدود الدنيا للمجموعة	التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب
أقل من ١٤,٥	٠



أقل من ١٦,٥	٣
أقل من ١٨,٥	١٣
أقل من ٢٠,٥	٢٨
أقل من ٢٢,٥	٣٧
أقل من ٢٤,٥	٤٠

لإيجاد $ر_٢$ نحدد ترتيبه أولاً وهو $\frac{٢ن}{٤} = \frac{٢ \times ٤٠}{٤} = ٢٠$ حيث ن هي مجموع التكرارات. وتكون بداية المجموعة الربيعية هي أ = ١٨,٥ وبالتالي فإن التكرارات السابقة واللاحقة وطول المجموعة هي هـ = ٢، $ق_٢$ = ٢٨، $ق_١$ = ١٣ وبالتعويض في قانون الربيعيات نجد أن:

$$ر_٢ = أ + \frac{\frac{٢ن}{٤} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ = ١٨,٥ + \frac{٢٠ - ١٣}{٢٨ - ١٣} \times ٢ = ١٩,٤٣$$

وبالتالي فإن الوسيط = $ر_٢$ = ١٩,٤٣ بالمثل فإن:

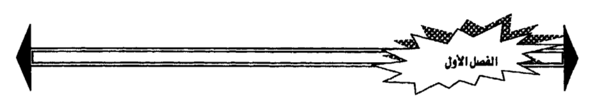
$$د_٥ = أ + \frac{\frac{٥ن}{١٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ = ١٨,٥ + \frac{٢٠ - ١٣}{٢٨ - ١٣} \times ٢ = ١٩,٤٣$$

أي أن الوسيط = $ر_٢$ = $د_٥$ = ١٩,٤٣ وأخيراً نوجد $م_{٢٥}$

$$م_{٢٥} = أ + \frac{\frac{٢٥ن}{١٠٠} - ق_١}{ق_٢ - ق_١} . هـ = ١٦,٥ + \frac{١٠ - ٣}{١٣ - ٣} \times ٢ = ١٧,٩$$

وواضح أن $م_{٢٥}$ = $ر_١$ = ١٧,٩.





* ملحوظة:

يمكن أيضاً تعيين كل من الربيعيات والعشيرات والمئينات بيانياً كما سبق في تعيين الوسيط بيانياً.

* *المنوال Mode*

يعرف المنوال بأنه القيمة الموجودة ضمن مجموعة من البيانات وتكون هذه القيمة هي الأكثر تكراراً فإذا كانت مجموعة البيانات هذه لها توزيع تكراري فإن المنوال هو القيمة المناظرة لأكبر تكرار. أي أن المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً بين القيم.

مثال (١٤):

أوجد المنوال للقيم ٥، ٦، ٧، ٨، ٥، ٧، ٦، ٧.

الحل:

القيمة الأكثر تكراراً هي ٧ وبالتالي فإن المنوال هو ٧.

مثال (١٥):

أوجد المنوال للقيم ٦، ٧، ٥، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥.

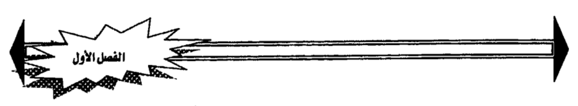
الحل:

في هذه الحالة يوجد أكثر من منوال فكل من ٥ و ٦ و ٧ هي قيم منوالية.

مثال (١٦):

أوجد المنوال للقيم ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٥، ٧، ٦، ٨، ٩.





الحل: في هذه الحالة نجد أنه لا توجد قيمة أكثر تكراراً وبالتالي لا يوجد منوال.

ويلاحظ أنه إذا كان للمجموعة منوال واحد سميت المجموعة وحيدة المنوال كما في مثال (١٤)، وإذا تعدد المنوال أي كان هناك أكثر من منوال سميت المجموعة متعددة المنوال كما في مثال (١٥) وتسمى المجموعة بعديمة المنوال إذا لم يوجد لها منوال كما في مثال (١٦).

*** المنوال في حالة البيانات المبوبة:**

تعريف المجموعة المنوالية Mode class

وتعرف المجموعة المنوالية بأنها المجموعة التي يقع فيها المنوال وتكون مناظرة لأكبر تكرار.

فإذا تم تحديد المجموعة المنوالية تقوم بحساب المنوال عن طريق التعويض المباشر في الصيغة التالية:

$$\text{المنوال} = أ + \frac{ق_م - ق_١}{٢ق_م - ق_١ - ق_٢} . هـ$$

حيث:

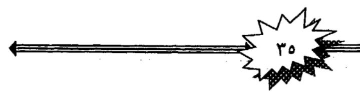
أ = بداية المجموعة المنوالية الفعلي.

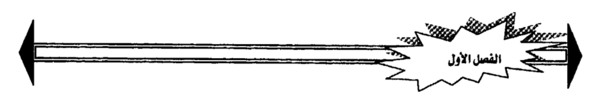
$ق_م$ = التكرار المناظر للمجموعة المنوالية.

$ق_١$ = التكرار السابق للمجموعة المنوالية.

$ق_٢$ = التكرار اللاحق للمجموعة المنوالية.

هـ = طول المجموعة المنوالية.





ويمكن كتابة القانون السابق بالصورة.

المنوال = $أ + \frac{د_1}{د_1 + د_2} . هـ$ حيث $د_1$ = $ق_م - ق_1$

و $د_2$ = $ق_م - ق_2$، ولذا تسمى هذه الطريقة بطريقة الفروق.

مثال (١٧):

احسب المنوال لمجموعة البيانات الآتية:

درجات الرياضيات	١٥-١٦	١٧-١٨	١٩-٢٠	٢١-٢٢	٢٣-٢٤	المجموع
عدد الطلاب	٣	١٠	١٥	٩	٣	٤٠

الحل:

نحدد المجموعة المنوالية فتكون هي ١٩-٢٠ وبالتالي فإن:

أ= ١٨,٥ ، $ق_م$ = ١٥، $ق_1$ = ١٠، $ق_2$ = ٩، هـ = ٢ وبالتعويض في القانون السابق فإن:

المنوال = $أ + \frac{ق_م - ق_1}{٢ق_م - ق_1 - ق_2} . هـ$ $= ١٨,٥ + \frac{١٥ - ١٠}{٣٠ - ٩ - ١٠} \times ٢ = ١٩,٤١$

أو يمكن تطبيق الصورة الثانية لطريقة الفروق كالآتي:

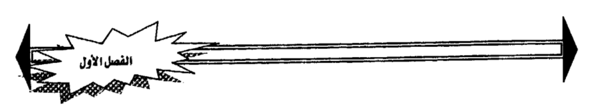
المنوال = $أ + \frac{د_1}{د_1 + د_2} . هـ$

$= ١٨,٥ + \frac{٥}{٥ + ٦} \times ٢ = ١٩,٤١$

ملحوظة:

هناك طريقة أخرى تسمى طريقة الرافعة وتعتمد هذه الطريقة على فرض أن المنوال يقع على مسافة معينة من البداية الفعلية للمجموعة المنوالية ولتكن





س ثم نقوم بتعيين هذه المسافة بقانون الروافع وإضافة هذه القيمة س إلى البداية الفعلية للمجموعة المنوالية فتكون قيمة المنوال وتعطي الصيغة النهائية لهذه العملية بالصورة:

$$\text{المنوال} = أ + \frac{ق_2}{ق_1 + ق_2} . هـ$$

حيث $ق_1$، $ق_2$، أ، هـ هي تلك القيم المعرفة سابقاً.

❖ **تعيين المنوال بيانياً**

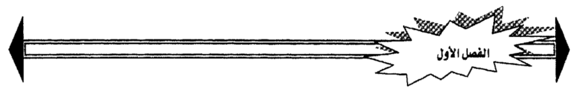
لتعيين قيمة المنوال بيانياً نقوم برسم المدرج التكراري للمجموعة المنوالية والمجموعتين السابقة والتالية لها ثم نصل النقطة الابتدائية بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة الابتدائية الموجودة بأعلى العمود المناظر للمجموعة التالية للمجموعة المنوالية وكذلك نصل النقطة النهائية الموجود بأعلى العمود المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة النهائية الموجودة بأعلى العمود المناظر للمجموعة السابقة للمجموعة المنوالية فيتقاطع الخطان في نقطة نقوم بإسقاط عمود من هذه النقطة على المحور الأفقي الممثل للمجموعات فتكون نقطة تقاطع هذا العمود والمحور الأفقي هي القيمة المنوالية.

مثال (١٨):

احسب المنوال لمجموعة البيانات الآتية بيانياً.

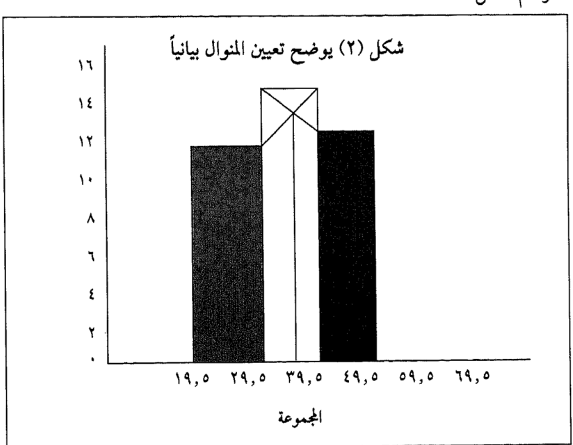
المجموعات	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩
التكرار	١٠	١٢	١٥	١٣	١٠



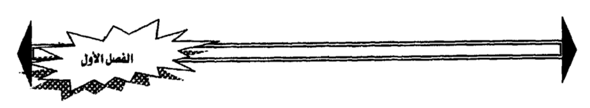


الحل:

نحدد المجموعة المنوالية فتكون هي ٣٩,٥-٤٩,٥ بالتالي نرسم المدرج التكراري للمجموعة المنوالية والمجموعتين المجاورتين لها ثم نصل نقطة البداية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة المنوالية بنقطة البداية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة بعد المنوالية وكذلك نصل النقطة النهائية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة المنوالية بالنقطة النهائية العليا للعمود التكراري المناظر للمجموعة قبل المنوالية فيتقاطع الخطان في نقطة نسقط من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي ليلاقيه في نقطة تكون هي النقطة المنوالية (انظر الرسم شكل ((٢)).







أ) مميزات المنوال

١) سهل حسابه وفهمه

٢) لا يتأثر بالقيم المتطرفة

٣) لا يحتاج لإعادة ترتيب البيانات إذا كان عددها قليل.

٤) يمكن إيجاده للقيم الوصفية والتوزيعات المفتوحة.

ب) عيوب المنوال

١) لا يأخذ في الاعتبار جميع القيم عند حساب المنوال.

٢) يوجد لحسابه أكثر من صورة وبالتالي يكون له أكثر من قيمة مختلفة.

٣) لا يمكن تناوله بالعمليات الجبرية.

٤) قد يكون للبيانات الواحدة أكثر من منوال وقد لا يكون هناك منوال لها.

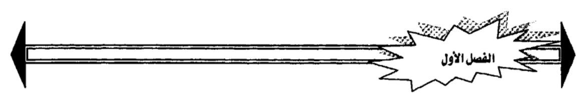
❖ **العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية المختلفة**

في حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة والأحادية المنوال تكون جميع المقاييس الوسيط، الوسط، المنوال متساوية ولكن إذا كان التوزيع ملتو التواء بسيطاً فإن هناك ثمة علاقة تجريبية نتجت وهي:

الوسط - المنوال = ٣ (الوسط – الوسيط)

ولا تتحقق هذه العلاقة في حالة زيادة حدة الالتواء.





* *الوسط الهندسي* ***Geometric mean (G.M)***

إذا كان لدينا مجموعة ن من البيانات الغير صفرية $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ فإن الوسط الهندسي لهذه القيم هو:

$$\text{الوسط الهندسي} = \sqrt[ن]{س_١ . س_٢ . س_٣ \ldots . س_ن}$$

$$= (س_١ . س_٢ . س_٣ \ldots . س_ن)^{\frac{١}{ن}}$$

ونظراً لصعوبة الجذر النوني يمكن كتابة الصورة السابقة باستخدام اللوغاريتمات كالآتي:

$$\text{لو (الوسط الهندسي)} = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{ن} \text{لو } س_ي \text{ ، } \Leftarrow \text{الوسط الهندسي} = \text{لو}\left(\frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{ن} \text{لو } س_ي\right)$$

وإذا كانت هذه البيانات تحدث بتكرارات بمعنى إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_م$ لها التكرارات $ق_١$، $ق_٢$، $ق_٣$، ... ، $ق_م$ على الترتيب فإن الوسط الهندسي في هذه الحالة هو:

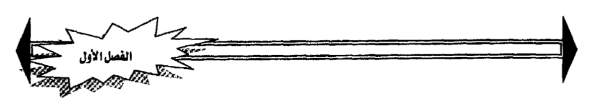
$$\text{الوسط الهندسي} = (س_١^{ق_١} . س_٢^{ق_٢} . س_٣^{ق_٣} \ldots س_م^{ق_م})^{\frac{١}{ن}}$$

حيث $ن = \sum_{ي=١}^{م} ق_ي$ والتي يمكن كتابتها باستخدام اللوغاريتمات للأساس الطبيعي (هـ) كالآتي:

$$\text{لو(الوسط الهندسي)} = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{م} ق_ي . \text{لو } س_ي$$

$$\text{الوسط الهندسي} = \text{لو}\left(\frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{م} ق_ي . \text{لو } س_ي\right)$$





*** ملحوظة:**

إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة أي ذي مجموعات فإننا نستعيض عن كل مجموعة بمركزها وتكرارها المناظر ونعوض في الصيغة السابقة.

مثال (١٩):

احسب الوسط الهندسي للبيانات الآتية: ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠.

الحل:

نكون الجدول الآتي لحساب المجموع $\sum_{ي=1}^{ن}$ لوس$_ي$:

وبالتالي فإن الوسط الهندسي هو:

القيمة س	لو س
٥	١,٦١
٧	١,٩٥
٨	٢,٠٨
٩	٢,٢٠
١٠	٢,٣٠
	$\sum_{ي=1}^{ن}$ لوس$_ي$ =١٠,١٤

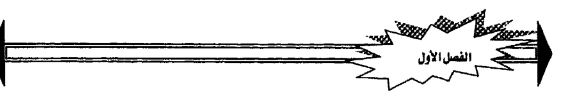
الوسط الهندسي = لو$\left(\frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} لوس_ي\right)$

= لو$\frac{(١٠,١٤)}{٥}$=٧,٥٩٩

ويلاحظ أن الوسط الحسابي لهذه القيم

هو ٧,٨ أي أن $\overline{س}$ ≤ الوسط الهندسي.





مثال (٢٠):

احسب الوسط الهندسي لمجموعة البيانات الآتية:

درجات الرياضيات	١٥-١٦	١٧-١٨	١٩-٢٠	٢١-٢٢	٢٣-٢٤	المجموع
عدد الطلاب	٣	١٠	١٥	٩	٣	٤٠

الحل:

نكون الجدول الآتي لحساب المجموع: $\sum_{ي=١}^{م}$ قي لوسي

المركز سي	التكرار قي	لو سي	قي لو سي
١٥,٥	٣	٢,٧٤	٨,٢٢
١٧,٥	١٠	٢,٨٦	٢٨,٦٢
١٩,٥	١٥	٢,٩٧	٤٤,٥٥
٢١,٥	٩	٣,٠٧	٢٧,٦١
٢٣,٥	٣	٣,١٥	٩,٤٧
	ن = ٤٠		$\sum_{ي=١}^{م}$ قي لوسي =١١٨,٤٧

وبالتالي فإن الوسط الهندسي هو:

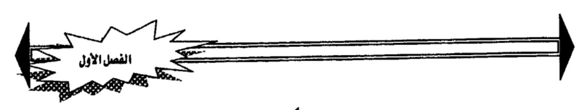
$$\text{الوسط الهندسي} = \text{لو}\left(\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{م} \text{قي . لوسي}\right)$$

$$= \text{لو}\left(\frac{١١٨,٤٧}{٤٠}\right) = ١٩,٣٣$$

*** مميزات الوسط الهندسي:**

١. من أهم المقاييس التي يمكن استخدامها للإشارة بمعدلات التغير أو النسب.





٢. يسهل حسابه والتعامل معه جبرياً.

٣. يعتمد في حسابه على جميع القيم.

٤. يستخدم كثيراً في الأرقام القياسية Index numbers.

*** عيوب الوسط الهندسي:***

١. ليس من السهل فهمه ويلزم له معرفتنا باللوغاريتمات.

٢. لا يمكن حسابه إذا كان هناك من القيم قيم صفرية أو سالبة.

***الوسط التوافقي* Harmonic Mean (H.M.)**

إذا كان لدينا مجموعة ن من البيانات الغير صفرية $س_١$، $س_٢$، $س_٣$،...،$س_ن$ فإن الوسط التوافقي لهذه القيم هو:

$$\text{توافق الوسط} = \frac{ن}{\frac{1}{س_1}+\frac{1}{س_2}+\dots+\frac{1}{س_ن}}$$

مثال (٢١):

احسب الوسط التوافقي للقيم ٤، ٥، ٧، ٩

الحل:

$$\text{توافق الوسط} = \frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}} = 5{,}7$$

وإذا كانت البيانات المعطاة تحدث بتكرارات بمعنى إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_م$ لها التكرارات $ق_١$، $ق_٢$، $ق_٣$، ...، $ق_م$ على الترتيب فإن الوسط التوافقي في هذه الحالة هو:





$$\text{توافق الوسط} = \frac{ق_1 + ق_2 + ... + ق_م}{\frac{ق_1}{س_1} + \frac{ق_2}{س_2} + ... + \frac{ق_م}{س_م}}$$

*** *ملحوظة:***

١. إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة أي ذي مجموعات فإننا نستعيض عن كل مجموعة بمركزها وتكرارها المناظر وتعوض في الصيغة السابقة.

٢. العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي هي:

$\bar{س} \leq$ الوسط الهندسي $\leq$ توافق الوسط.

مثال (٢٢):

إذا كان الوسط الحسابي لعددين هو ٥ ووسطهم الهندسي هو ٥ فما هما العددين؟.

الحل:

بفرض أن العددين هما س، ص وبالتالي فإن الوسط الحسابي لهما هو:

$$\bar{س} = \frac{س + ص}{٢} = ٥$$

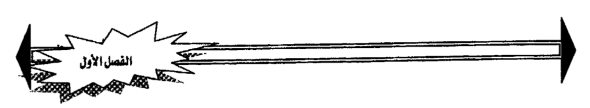
ويكون الوسط الهندسي هو = $\sqrt{س.ص} = ٥$ وبالتربيع للطرفان فإن:

س . ص = ٢٥ ومنها فإن:

$س = \frac{٢٥}{ص}$ بالتعويض عن ذلك في المعادلة الأولى فإن:

$\frac{٢٥}{ص} + ص = ١٠$ وبحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية فإن:

$ص^٢ - ١٠ص + ٢٥ = (ص-٥)^٢ = ٠$ أي أن س = ص = ٥.



مثال (٢٣):

أوجد الوسط الحسابي، والهندسي والتوافقي الآتية: ٣٢، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٩، ٤١، ٤٣ ووضح العلاقة $\bar{س} \leq$ الوسط الهندسي $\leq$ الوسط التوافقي.

الحل:

الوسط الحسابي لهذه الأرقام $(\bar{س} = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{ن} س_{ي})$

$$\bar{س} = \frac{١}{٧} (٣٢+٣٥+٣٦+٣٧+٣٩+٤١+٤٣) = ٣٧,٥٧$$

أما الوسط الهندسي فهو = $لو (\frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{ن} لو س_{ي})$

$$= لو (\frac{٢٥,٣٥}{٧}) = ٣٧,٤١$$

وأخيراً فإن الوسط التوافقي هو:

$$\text{الوسط التوافقي} = \frac{ن}{\frac{١}{س_{١}} + \frac{١}{س_{٢}} + ... + \frac{١}{س_{ن}}}$$

$$= \frac{٧}{\frac{١}{٣٢} + \frac{١}{٣٥} + ... + \frac{١}{٤٣}} = ٣٧,٢٥$$

وواضح أن:

$$٣٧.٥٧ \geq ٣٧,٤١ \geq ٣٧,٢٥$$

أي أن الوسط التوافقي $\leq$ الوسط الهندسي $\leq \bar{س}$





تمارين

١. احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات الآتية ١٠، ١٢، ٥، ٠، ٦، ٥، ٧، ٨.

٢. أوجد كل من الوسيط والربيع الثالث بيانياً لمجموعة البيانات الآتية:

الدرجات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩
عدد الطلاب	٧	١١	١٢	١٠

٣. أوجد الوسط الحسابي والمنوال وكذلك الوسط الهندسي للبيانات الآتية:

الأوزان	٥-٧	٨-١٠	١١-١٢	١٣-١٥
عدد الأطفال	٥	١٠	٣	٢

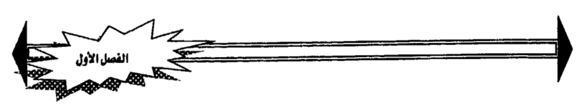
٤. إذا كان هناك شركة تنتج الملابس الجاهزة للرجال والسيدات. وكان نسبة الربح من المبيعات هو ١٥٪ فإذا كانت نسبة الربح من بيع ملابس الرجال هي ٨٪ وكان ملابس السيدات تشكل نسبة ٥٠٪ من المبيعات فما هي نسبة الربح من ملابس السيدات.

٥. أوجد الربيع الثالث والعشير الرابع والمئين التسعون للقيم الآتية:

الأوزان	١٥,٥-١٨,٥	١٨,٥-٢١,٥	٢١,٥-٢٤,٥	٢٤,٥-٢٧,٥	٢٧,٥-٣٠,٥
عدد الأطفال	٨	٢٢	٣٠	٢٦	٢٤

٦. إذا كان لدينا مصنع ما ينتج ثلاثة أنواع من الملابس وكان عدد الأنواع الثلاث هي ٢٥، ٤٥، ٣٠ ومتوسط كل نوع هو ٥، ٣,٢٥، ٤,٥ على الترتيب فما هو المتوسط المشترك لهذه الأنواع الثلاث.





٧. إذا كانت القيم $س_١$، $س_٢$ قيم غير سالبة فبرهن أن $\bar{س} \geq$ الوسط الهندسي وهل يمكنك تعميم ذلك لعدد ن من القيم الموجبة.

٨. أوجد الوسط الحسابي للبيانات ٥٣، ٧٣، ٩٣، ١٠٣، ١٥٣ بمعلومة الوسط الحسابي لبيانات أخرى هي ٥، ٧، ٩، ١٠، ١٥ (لاحظ أن ص= ١٠س + ٣).

٩. اكتب قيمة كل من ب، جـ التي تحقق العلاقة التجريبية في حالة التواء التوزيع التواءً بسيطاً:

الوسط – المنوال = م (الوسط – الوسيط).

المنوال = الوسط – ب (الوسط – الوسيط).

١٠. أكمل الفراغ فيما يلي:

أ) من مقاييس النزعة المركزية التي يسهل التعامل معها جبرياً هو............

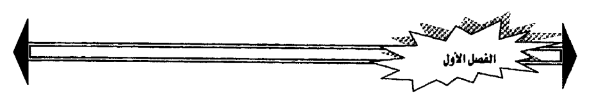
ب) تسمى التوزيعات التي لها أكثر من منوال بـ.................

جـ) يقع .... بين الوسط الحسابي والوسط التوافقي.

د) تستخدم الجداول التكرارية المتجمعة في حساب كل من .... و............

هـ) المنوال هو القيمة.......................

و) الوسط الهندسي لمجموعة من القيم تحوي بينهم القيمة صفر يساوي........



١١. ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة في الجمل الآتية:

أ) تتأثر قيمة الوسيط أكثر بالقيم المتطرفة عن الوسط الحسابي.

ب) الوسط الحسابي يكون دائماً هو أفضل مقاييس النزعة المركزية.

جـ) يقع الوسط الهندسي بين الوسط الحسابي والوسط التوافقي.

د) يستخدم الوسط الهندسي في حساب المعدل للأرقام القياسية.

هـ) لأي توزيع تكراري يمكننا استخدام العلاقة التجريبية.

الوسط – المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط)

و) الربيع الأول هو القيمة التي تسبقه ٥٠٪ من البيانات.

ي) المنوال هو قيمة تتكرر كثيراً بين القيم.

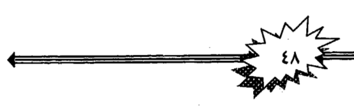
١٢. أوجد العشير الثالث والربيع الأول وكذلك المئين العشرون لمجموعة البيانات الآتية:

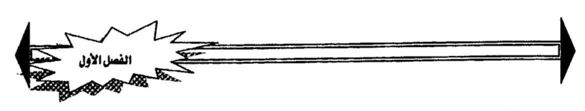
الأوزان	١٥,٥–١٨,٥	١٨,٥–٢١,٥	٢١,٥–٢٤,٥	٢٤,٥–٢٧,٥	٢٧,٥–٣٠,٥
عدد الأطفال	٨	٢٢	٣٠	٢٦	٢٤

١٣. احسب الوسط التوافقي للقيم ٨، ٧، ١٣، ١١، ١٢، ١٠.

١٤. أوجد قيمة جـ التي تجعل قيمة الوسط الحسابي ٤٥ ,٦٧ للبيانات الآتية:

الأوزان	٦٠–٦٢	٦٣–٦٥	٦٦–٦٨	٦٩–٧١	٧٢–٧٤
عدد الأطفال	٥	١٨	جـ	٢٧	٨





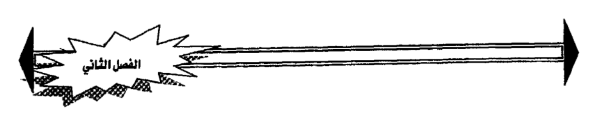
١٥. أوجد الوسيط والمنوال للبيانات في التمرين السابق.

١٦. أوجد الربيع الأول وكذلك العشير الثالث والمئين العاشر للبيانات في التمرين السابق بيانياً.

١٧. أوجد الوسط الحسابي للبيانات ١، ٢، ٣، ....، ن والتي تحدث بتكرارات هي (١^{ن})، (٢^{ن})، (٣^{ن})، .... ، (ن^{ن}) حيث (ي^{ن}) هي دالة التوافيق المعروفة.



المعاينة وتوزيعات المعاينة



الفصل الثاني
المعاينة وتوزيعات المعاينة

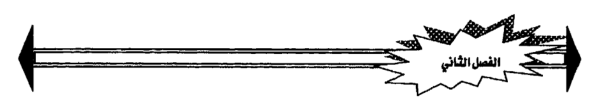
مقدمة :

لن نعمد في هذا الفصل إلى بحث كامل لنظرية المعاينة، بل سنقتصر على ما هو لازم وضروري لدراسة نظرية التقدير. لذا ستعرض فقط للحالات التي توافق نموذجاً لملاحظات متكررة ومستقلة على متغير عشوائي حقيقي ع، ونقدم بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المعاينة كالاستدلال الإحصائي، العينة العشوائية، التوزيع التجريبي، عزوم العينة، الإحصاءات المرتبة... الخ، ومن ثم نبحث في توزيعات المعاينة لبعض الصيغ الخطية والتربيعية في متغيرات العينة، بالإضافة إلى دراسة موجزة للإحصاءات المرتبة وتوزيعاتها الاحتمالية، حيث إن هذه الأخيرة مهمة جداً عند دراسة الاستدلال الإحصائي اللامعلمي، وأخيراً، دراسة تقارب بعض مميزات العينة وتوزيعات المعاينة في حالة عينات كبيرة.

الاستدلال الإحصائي : Statistical Inference

يعزى دائماً تقدم العلوم للتجريب، وإذا أنجز الباحث تجربة وتحصل على بعض المعلومات وبناءً على هذه المعلومات توصل إلى نتائج معينة، وهذه النتائج عادة تتجاوز مواد وعمليات التجربة الخاصة.





وبعبارة أخرى، يستطيع الباحث التعميم من التجربة الخاصة إلى صف كل التجارب المشابهة.

يدعى هذا النوع من التمديد من الخاص إلى العام بـ"الاستدلال الاستقرائي" "inductive inference"، ويعتبر إحدى طرق الوصول إلى معرفة جديدة.

لا تعطى طريقة الاستدلال الاستقرائي تعميمات مؤكدة، لكن يمكن قياس درجة الشك (أو درجة الثقة) بتلك التعميمات فيما إذا أنجزت التجربة وفق مبادئ معينة. وإحدى مهام الإحصاء تتمثل في تقديم الأساليب لإجراءات استدلالات استقرائية وقياس درجة الثقة في كل استدلال وذلك بعبارة احتمالية.

وتجدر الإشارة هنا إلى نوع آخر من الاستدلال، الذي يدعى "الاستدلال الاستنتاجي" "deductive inference"، في حين أن النتائج التي نتوصل إليها بواسطة الاستدلال الاستقرائي احتمالية، إلا أن النتائج التي نتوصل إليها بواسطة الاستدلال الاستنتاجي قطعية (مؤكدة).

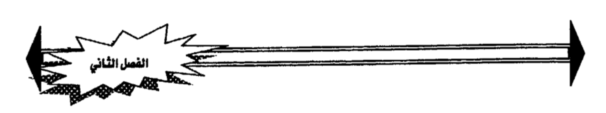
ولإيضاح الاستدلال الاستنتاجي، لنفترض لدينا العبارتين الآتيتين:

١. إحدى الزوايا الداخلية في كل مثلث قائم تساوي ٩٠ درجة.

٢. المثلث أ قائم. إذا قبلنا بالعبارتين السابقتين فنصل قطعاً إلى النتيجة:

٣. إحدى الزوايا الداخلية في المثلث أ تساوي ٩٠ درجة.





تدعى العبارة (١) بالمقدمة الكبرى، والعبارة (٢) بالمقدمة الصغرى، بينما العبارة (٣) فتدعى بالنتيجة.

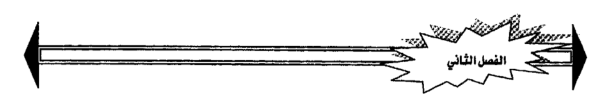
نلاحظ أن طريقة الاستدلال الاستنتاجي هي الانتقال من العام إلى الخاص أي عكس الاستدلال الاستقرائي، بالإضافة إلى أنها تعطي نتائج مؤكدة.

بالرغم من أن الاستدلال الاستنتاجي مهم جداً، وخاصة في الرياضيات، للوصول إلى معارف جديدة، إلا أن الكثير من المعارف الجديدة في مختلف الميادين يتم الوصول إليها باتباع طريقة الاستدلال الاستقرائي.

لنوضح الآن الاستدلال الاستقرائي بمثال بسيط. لنفترض لدينا صندوق تخزين يحتوي على ١٠مليون بذرة ورد، ونعلم أن كل بذرة تنتج وردة بيضاء أو حمراء. فيما لو زرعت. ونريد معرفة ما يلي:- كم عدد (أونسية) البذور ضمن الـ ١٥ مليون بذرة التي ستنتج ورود بيضاء؟ الطريقة الوحيدة التي تمكننا الإجابة على هذا السؤال وبدقة تامة هي زراعة كل البذور الـ ١٠ مليون وملاحظة عدد الورود البيضاء.

لكن هذه الطريقة غير عملية لأننا نريد بيع البذور، وحتى إذا لم نرد بيع البذور، فنرغب في الإجابة على هذا السؤال بأقل تكلفة وجهد ممكنين وأحياناً في أسرع وقت. طبعاً، بدون زراعة كل البذور، ومن ثم ملاحظة عدد الورود البيضاء لا يمكننا بشكل مؤكد معرفة عدد البذور في صندوق التخزين التي ستنتج بذوراً بيضاء.





الطريقة المنطقية الأخرى هي: نستطيع زراعة جزء من البذور، وعلى أساس ألوان الورود الناتجة نحصل على إفادة (تقدير) حول عدد البذور ضمن الـ ١٠ مليون بذرة التي سوف تنتج وروداً بيضاء.

وهذه إجابة غير مؤكدة عن عدد البذور التي ستنتج وروداً بيضاء، لكن يمكن صياغة عبارة احتمالية (درجة الثقة) بالإجابة فيما إذا كان ذلك الجزء من البذور مأخوذاً بطريقة معينة.

هكذا، فالاستدلال الاستقرائي: نأخذ جزءاً من الـ ١٠ مليون بذرة، نزرعها، نلاحظ عدد الورود البيضاء، وعلى أساسها نقدر عدد البذور التي ستنتج وروداً بيضاء ضمن الـ ١٠ مليون بذرة.

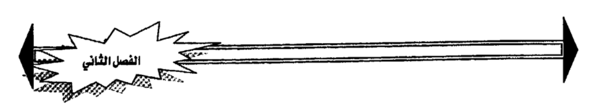
أي من معرفة ألوان جزء نعمم على الكل (١٠ مليون بذرة) وهذا التعميم غير مؤكد. وإذا كان هذا الجزء من الكل مأخوذ بطريقة علمية (محققة لشروط معينة، وهذا ما سنتطرق إليه لاحقاً)، فيمكننا قياس درجة الثقة في التعميم باستخدام نظرية الاحتمالات، وعندئذٍ يطلق على الاستدلال الاستقرائي بـ "الاستدلال الإحصائي = statistical in ference".

يعالج الاستدلال الإحصائي مسألتين هامتين هما:

١. التقدير.

٢. اختبار الفرضيات.





العينة العشوائية وتوزيعها Random Sample and its Distribution

ليكن ع متغيراً عشوائياً وحيد البعد (one – dimensional) دالة توزيعه ق(س) معرفة على ح (فئة الأعداد الحقيقية)، ولترمز لتوزيع ع بشكل عام بـ ل (ع) تعرف العينة العشوائية بحجم ن مأخوذة من مجتمع دالة توزيعه ق(س) على أنها متغير عشوائي ذي ن بعد س = ($س_1$، ... ، $س_ن$) دالة توزيعه:

$$ق_س(س) = ق_س(س_1، ...، س_ن) =$$

$$\prod_{ي=1}^{ن} ق(س_ي) \text{..................} (1) \text{ معرفة على } ح^ن$$

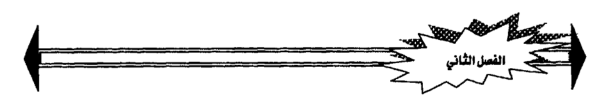
نلاحظ من هذا التعريف أن العناصر أو المركبات $س_1$، ... ، $س_2$ للعينة العشوائية مستقلة ولكل منها نفس التوزيع، وهو توزيع المجتمع الذي سحبت منه، أي ق(س). ومن أجل الاختصار نقول عادة أن س عينة عشوائية بحجم ن ق(س) (أو من ل (ع))، وبملاحظة أن العينة بحجم ن من ق(س) عبارة عن مثال بسيط للعمليات العشوائية المنتهية، لذا تدعى أحياناً بالعينة العشوائية البسيطة (simple random sample) أو بالمعاينة العشوائية البسيطة (simple random sampling) وفيما يلي حيث نذكر كلمة عينة نقصد بها عينة عشوائية.

إذا كان المتغير العشوائي ع من النوع المنقطع (المتقطع) دالة احتماله ق(س)، فإن دالة احتمال ودالة توزيع العينة س.

$$ق_س(س) = ق_س(س_1، ...، س_ن) = \prod_{ي=1}^{ن} ق(س_ي)$$

$$ق_س(س) = \prod_{ي=1}^{ن} \left(\sum_{س_{ير} \le س_ي} ق(س_{ير}) \right) \text{..................................} (2)$$

حيث إن $س_{ير}$، ر = ١، ٢، ... القيم الممكنة



للمركبة $س_ي$، ي = ١، ... ، ن

وإذا كان المتغير ع من النوع المستمر (المتصل)، فإن دالة كثافة ودالة توزيع العينة س. $ق_س(س) = ق\,(س_1، ...، س_ن) = \prod_{ي=1}^{ن} ق(س_ي)$

$$ق_س(س) = \prod_{ي=1}^{ن}\left(\int_{-\infty}^{س_ي} ق(س)\,دس\right)$$

وهذا بناءً على مفهوم استقلال المتغيرات العشوائية في نظرية الاحتمالات.

بعد ملاحظة العينة س = ($س_1$، ... ، $س_ن$)، تكون القيم الفعلية لـ $س_1$، ... ، $س_ن$ معلومة، أي لدينا عينة عشوائية مسحوبة فعلاً من المجتمع ق(س)، نرمز لها عادة بـ س = ($س_1$، ... ، $س_ن$) وتدعى بالعينة العشوائية الملاحظة (المشكلة فعلاً).

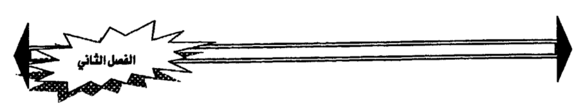
ملاحظة: إن تعريفنا للمعاينة العشوائية يقتصر على المعاينة من مجتمع غير منتهي أو منتهي لكن السحب مع الإعادة، لأن المركبات $س_ي$، ي = ١، ... ، ن مستقلة.

التوزيع التجريبي Experimental Distribution

إن مسألة استدلال التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ع [توزيع المجتمع ل (ع)] أو بعض خصائصه، في حالة كون ل (ع) غير معلوم، تتطلب في حالات عدة تبويب المعطيات الإحصائية التي تقدمها عينة عشوائية ملاحظة س = ($س_1$، ... ، $س_ن$) من هذا المجتمع.

إذا كان المتغير العشوائي ع من النوع المنقطع وحجم العينة ن صغيراً، فنأخذ القيم المختلفة في العينة الملاحظة س ونرتبها تصاعدياً ومن ثم نعين





التكرارات النسبية الموافقة لها، فمثلاً، إذا كان القيم الملاحظة $س_ي$؛ ي = ١، ...، ن تشتمل على ك ≤ ن قيمة مختلفة ولنرمز لها بـ $م_ر$؛ ر = ١، ... ، ك حيث $م_١ < م_٢ < ... < م_ك$، وكانت $\frac{ن_ر}{ن}$، ر = ١، ....، ك التكرارات النسبية الموافقة لها، فتدعى فئة الثنائيات.

$\{(م_ر، \frac{ن_ر}{ن})$؛ ر = ١، ... ، ك$\}$، أي التوزيع التكراري النسبي لمعطيات العينة المشاهدة، بالتوزيع التجريبي للمتغير العشوائي الملاحظ ع الموافق للعينة س = ($س_١$، ... ، $س_ن$)، حيث إن $\sum_{ي=١}^{ك} \frac{ن_ر}{ن} = ١$.

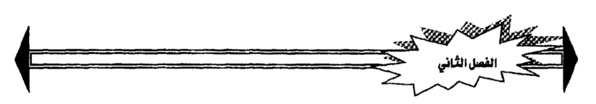
وللتمييز نستخدم أحياناً مصطلح التوزيع النظري لـ ع للدلالة على التوزيع الاحتمالي له (توزيع المجتمع) ويتم عرض التوزيع التجريبي لـ ع جدولياً، كالجدول (١)

جدول (١): التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي المنقطع ع

القيم الملاحظة المختلفة $م_ر$	$م_١$	$م_٢$	...	$م_ك$
التكرارات النسبية الموافقة $\frac{ن_ر}{ن}$	$\frac{ن_١}{ن}$	$\frac{ن_٢}{ن}$	...	$\frac{ن_ك}{ن}$

أما إذا كنا ندرس متغيراً عشوائياً مستمراً ع، أو كان منقطعاً لكن حجم العينة ن كبير، فإن تبويب المعطيات الإحصائية يتطلب تقسيم المدى ر = $س_{(ن)} - س_{(١)}$ إلى ك من الفئات الجزئية غير المتقاطعة، وتبسط الحسابات إلى حد كبير إذا كانت الفئات متساوية المدى $\frac{ر}{ك} \approx ١$، وهذا ما سوف تعتمده دوماً.





وبعدئذٍ يتم حساب التكرارات النسبية الموافقة لتلك الفئات $ن_ر/ن$.
ونشير هنا إلى أن عدد الفئات ك اختياري وعادة لا يقل عن ٥ ولا يزيد عن ٢٠، ويعتمد هذا الاختيار على طبيعة الظاهرة أو الخاصة المدروسة، بحيث يمكن اعتبار عناصر الفئة متجانسة بالنسبة للصفة المدروسة ع، ونحصل بالنتيجة على التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي الملاحظ ع، كما هو مبين في الجدول (٢).

جدول (٢): التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي ع

الفئات $(جـ_{ر-١}، جـ_ر]$	$(جـ_٠، جـ_١]$	$(جـ_١، جـ_٢]$	...	$(جـ_{ك-١}، جـ_ك]$
التكرار النسبي $ن_ر/ن$	$ن_١/ن$	$ن_٢/ن$	...	$ن_ك/ن$

حيث $(جـ_{ر-١}، جـ_ر]$ الفئة رقم ر = ١، ٢، ... ، ك و $\sum_{١}^{ك} \frac{ن_ر}{ن} = ١$

يعتبر التكرار النسبي $ن_ر/ن$ للحادث $ب_ر = (جـ_{ر-١}، جـ_ر]$ متغيراً عشوائياً (لأنه يتغير بشكل عام من عينة ملحوظة لأخرى) بقيمة متوقعة تساوي احتمال هذا الحادث، أي أن:

$$و\left(\frac{ن_ر}{ن}\right) = ح(جـ_{ر-١} < ع \leq جـ_ر) = ح(ب_ر) = ح_ر \qquad .... (١)$$

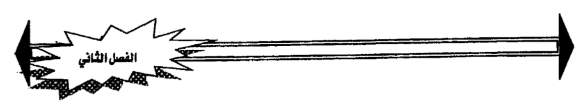
لأن المتغير العشوائي ص = $ن_ر$ يتبع توزيع ذي الحدين ب $(ن، ح_ر)$

وكما نعلم من قانون الأعداد الكبيرة [مبرهنة بيرنولي] أنه إذا كررت التجربة المفروضة ن مرة تحت نفس الشروط، فإن التكرار النسبي لظهور الحادث $ب_ر$ ينتهي إلى احتمال هذا الحادث، وذلك عندما ن ⟵ ∞، أي أن:

$$نـها_{ن \leftarrow \infty} \frac{ن_ر}{ن} = ح_ر$$

وهذا يعني، بملاحظة الجدولين (١) و (٢)، أن السطر الثاني في كليهما





يحتوي على القيم التقديرية للاحتمالات $ح_ر$؛ ر = ١، ٢، ... ، ك. أي أن:

$$\frac{ن_ر}{ن} \approx ح_ر \text{ ؛ ر = ١، ... ، ك}$$

دالة التوزيع التجريبي Experimental Distribution function

لنفترض من أجل أي عدد حقيقي س فالمتغير $ع_ي$ معرف على النحو الآتي:

$$ع(س) = \begin{cases} ١ & ؛ \quad س_ي < س \\ ٠ & ؛ \quad س_ي \geq س \end{cases} \quad \text{، ي = ١، ٢، ... ، ن} \quad \text{.............. (٢)}$$

وعليه $ع = \sum_{ي=١}^{ن} ع_ي$ متغير عشوائي يمثل عدد عناصر العينة الملاحظة س = ($س_١$، ...، $س_ن$) الأصغر من س.

إذا رمزنا بـ $\dot{ق}_ن(س) = \frac{ع}{ن}$، فتدعى الدالة $\dot{ق}_ن(س)$ بدالة التوزيع التجريبي لـ ع (experimental distribution function)، الموافقة للعينة الملاحظة س.

وللتمييز نسمي دالة التوزيع ق(س) للمتغير العشوائي ع بدالة التوزيع النظري (توزيع المجتمع) وفي حالات عدة حيث لا يوجد التباس نسقط الدليل ن، أي نرمز بـ ق*(س) لدالة التوزيع التجريبي لـ ع.

مثال (١):

إذا كان التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي ع معطى بالجدول (٣)، فأوجد دالة التوزيع التجريبي ق*(س).



جدول (٣): التوزيع التجريبي لـ ع.

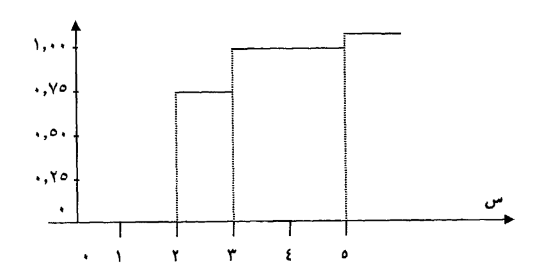
القيم الملاحظة لـ U	٢	٣	٥
التكرار	٠,٧٥	٠,٢٠	٠,٠٥

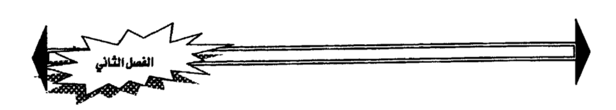
من تعريف دالة التوزيع التجريبي $ق^{*}_{ن}(س)=\frac{ع}{ن}$، نجد أن:

$$ق^{*}_{ن}(س)=\begin{cases} ٠ \text{ ؛ } س\leq ٢ \\ ٠,٧٥ \text{ ؛ } ٢<س\leq ٣ \\ ٠,٩٥ \text{ ؛ } ٣<س\leq ٥ \\ ١ \text{ ؛ } س>٥ \end{cases}$$

والتمثيل البياني لدالة التوزيع التجريبي $ق^{*}_{ن}(س)$ يبينه الشكل (١).

شكل (١)



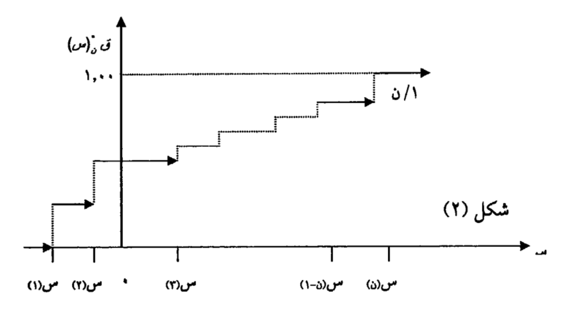


إذا كانت عناصر المتجه س مختلفة فإن دالة التوزيع التجريبي $\dot{ق}_{ن}(س)$ تعطى كما يلي:

$$ق^{*}_{ن}(س) = \begin{cases} ٠ & ؛ \quad س \leq س_{(١)} \\ ك/ن & ؛ \quad س_{(ك)} < س \leq س_{(ك+١)} \\ ١ & ؛ \quad س > س_{(ن)} \end{cases} \quad ، ك = ١، ٢، ...، ن-١$$

وهذا يعني، في هذه الحالة، أن قيم القفزات متساوية وتساوي ١/ن.

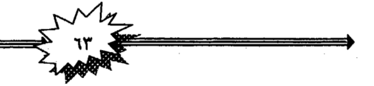
والتمثيل البياني لـ $ق^{*}_{ن}(س)$ يأخذ الشكل (٢).

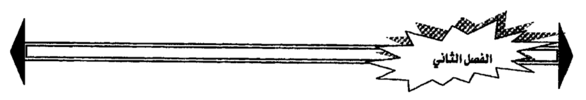


شكل (٢)

وفي الحالة العامة يمكن كتابة دالة التوزيع التجريبي $\dot{ق}_{ن}(س)$ على النحو الآتي:

$$ق^{*}_{ن}(س) = \frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} هـ(س - س_{(ك)}) \quad ....(٣)$$





حيث هـ (س) ما هي إلا دالة الواحدية للقفزات (دالة خوفسيد):

$$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & ؛ \quad س \leq ٠ \\ ١ & ؛ \quad س > ٠ \end{cases}$$

وفي العلاقة (٣) يبدو بوضوح ارتباط $ق^{*}_{ن}(س)$ بالعينة س.

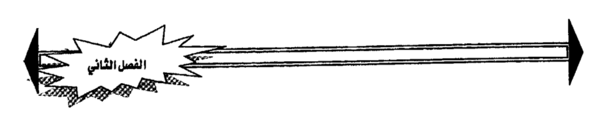
إن لدالة التوزيع التجريبي دوراً هاماً وأساسياً في الإحصاء الرياضي، وتكمن أهميتها الخاصة بأنه ازدياد عدد الملاحظات للمتغير العشوائي ع تقترب دالة التوزيع التجريبي $ق^{*}_{ن}(س)$ من دالة التوزيع النظري ق(س). وهذا ما سنراه لاحقاً.

التمثيل البياني للتوزيعات التجريبية

فلاحظ مما سبق أن التوزيع التجريبي يعتبر طريقة مفيدة لتمثيل المعطيات الإحصائية (معطيات العينة الملاحظة) والتي تمكننا من استدلال بعض النتائج عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ع عندما يكون مجهولاً بشكل كامل أو جزئي.

هذا وتوجد طرق أخرى لتمثيل المعطيات الإحصائية، وإحدى هذه الطرق تتمثل في بناء المدرج والمضلع للتوزيع التجريبي لـ ع.

ويستخدم مضلع التوزيع التجريبي عندما يكون المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً أو منقطعاً، أما مدرج التوزيع التجريبي فيقتصر استخدامه على حالة



كون المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً، أو أن العينة العشوائية س ذات حجم كبير (المعطيات الإحصائية مبوبة حسب الفئات).

لنوضح كيفية بناء مدرج ومضلع توزيع تجريبي لمتغير عشوائي ع من خلال المثال التالي:

مثال (٢):

لتكن لدينا نتائج دراسة متانة ٢٠٠ نموذج من البيتون المسلح، كما هي واردة في الجدول التالي:

جدول (٤)

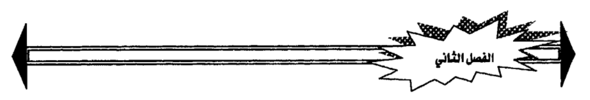
التكرار النسبي $\frac{ن_ر}{ن}$	مجال المتانة (ميجا باسكال)
٠,٠٥	١٩-٢٠
٠,١٣	٢٠-٢١
٠,٢٨	٢١-٢٢
٠,٣٢	٢٢-٢٣
٠,١٥	٢٣-٢٤
٠,٠٧	٢٤-٢٥

المطلوب بناء مدرج ومضلع التوزيع التجريبي المعطي.

لبناء المدرج التكراري لهذا التوزيع التجريبي نرسم محورين متعامدين، يمثل المحور الأفقي الفترات الجزئية والمحور الشاقولي التكرارات النسبية.

ثم نحدد الفترات الجزئية للقيم الملاحظة والتكرارات النسبية الموافقة على المحول الأفقي والشاقولي على الترتيب، وبعد ذلك نقيم مستطيلات على تلك

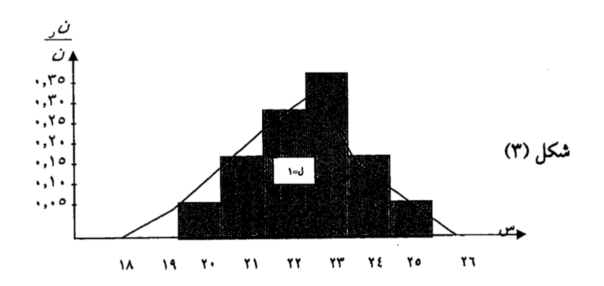




الفترات الجزئية بارتفاعات تساوي التكرارات الموافقة، فنحصل بالنتيجة على المدرج التكراري المبين بالشكل (٣).

لرسم مضلع التوزيع التجريبي، نحدد منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات المبينة على الشكل (٣) ثم نصل على الترتيب بخطوط مستقيمة فنحصل على المطلوب.

ولإغلاق المضلع نضيف فئة ميل الفئة الأولى وأخرى بعد الفئة الأخيرة بحيث يكون التكرار النسبي لكل منها صفراً، فنحصل على المضلع المبين على الشكل (٣).



شكل (٣)

يستخدم مدرج ومضلع التوزيع التجريبي لاستدلال نوع نموذج التوزيع لـ عَ. فمثلاً، النموذج المبين على الشكل (٣) يذكرنا بالنموذج الطبيعي العام، لهذا يمكن افتراض أن نوع توزيع المتغير العشوائي الملاحظ عَ هو طبيعي، هكذا، يمكن اعتبار الشكل البياني للتوزيع التجريبي لمتغير عشوائي عَ كمناظر إحصائي لشكل التوزيع النظري له.





الإحصاء وعزوم العينة Statistic and Sample Moment

إن تشكيل العينة العشوائية ليس هدفاً بحد ذاته، بل الهدف هو الوصول إلى استدلالات حول المجتمع الذي سحبت منه، وهذه الاستدلالات قد تكون حـول توزيع المجتمع أو حول بعض أو كل مميزاته العددية (معالمه).

لهـذا في نظريـة المعاينـة لا نكتفـي بمعرفـة التوزيـع التجـريبي أو التوزيـع الاحتمالي للعينة العشوائية، بل نهتم بمعرفة دالة أو أكثر في المتغيرات العـشوائية المكونة للعينة، حيث تستخدم للقيام باستدلالات حول معالم المجتمع. ومـن أهـم تلـك الـدوال مـا تـدعى بعـزوم العينـة (Sample moments) سـنعرف أولاً الإحصاء أو الإحصاءة (statistic).

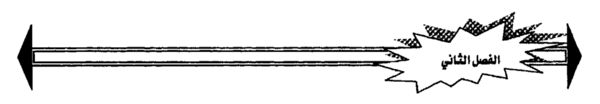
تعريف: الإحصاء Statistic

إذا كانت س = ($س_1$، ... ، $س_ن$) عينة عشوائية من التوزيع ل (عَ)، فـإن أي دالة في العينة فقط ت = ت (س) تدعى إحصاءً.

نلاحظ من هذا التعريف أن الإحصاء ت = ت (س) لا يحتـوي علـى أي معلمة مجهولة، كما أنه يعتبر متغيراً عشوائياً لأن قيمته، بـشكل عـام، تـتغير مـن عينـة ملاحظـة لأخـرى، وبالتـالي لـه توزيـع احتمـالي يـدعى بتوزيـع المعاينـة (sampling distribution) للإحصاء ت.

فمثلاً، إذا كانت س = ($س_1$، ... ، $س_ن$) عينة عشوائية من التوزيع ل(عَ) $\in$ ن[1] (Θ، Θ_2^2) حيـث Θ_1، Θ_2 معلمـتين مجهـولتين، فـإن الدالـة $س_1 - \Theta_1$





وكذلك الدالة $\sum_{1}^{ن} س_ي/\Theta_2$ ليست إحصاء، (لأن كليهما ليس دالة في العينة فقط، بل يحويان معلمة مجهولة)، لكن:

$$\sum_{1}^{ن} س_ي ، \frac{س_1 + س_2}{4} \text{ و } \sum_{1}^{ن} لو_هـ س_ي \text{ إحصاءات.}$$

إحدى المسائل الأساسية في الإحصاء هي إيجاد الإحصاءات المناسبة لتقدير معالم المجتمع.

سنتعرف فيما يلي ونناقش بعض الإحصاءات العامة وهي عزوم العينة.

تعريف: عزوم العينة Sample moments

لتكن س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ع ولنرمز له بـ ق(س)، عندئذ فالعزم الابتدائي (حول ٠) للعينة س من المرتبة ر نرمز له بـ $أ_ر$ = $أ_ر$(س)، ويعرف كالآتي:

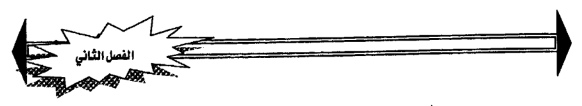
$$أ_ر(س) = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} س_ي^{ر} \quad ; \quad ر = ١، ٢، .... (١)$$

وكحالة خاصة، عندما ر = ١، نحصل على متوسط العينة، ويرمز له عادة بـ $\overline{س}$ أو $\overline{س}_ن$، أي أن:

$$أ_ر(س) = \overline{س} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} س_ي \quad .... (٢)$$

وبشكل مشابه، العزم المركزي (حول $\overline{س}$) للعينة من المرتبة ر، نرمز له بـ $م_ر$ = $م_ر$(س)، ويعرف كالآتي:





$$م_ر(س) = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \overline{س})^ر \quad ; \quad ر = ١، ٢، ....\ (٣)$$

وكحالة خاصة، عندما ر = ٢، نحصل على تباين العينة، ويرمز له عادة بـ

$$م_٢(س) = ل^٢ = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \overline{س})^٢ \quad ....\ (٤)$$

وكما نعلم من نظرية الاحتمالات، إذا رمزنا بـ $\alpha_ر$ و $M_ر$ للعزم الابتدائي والمركزي من المرتبة ر للمتغير العشوائي عٓ (العزوم النظرية) على الترتيب، فإن:

$$\alpha_ر = و ع^ر \quad ; ر = ١، ٢، ....$$

$$M_ر = و(ع - M)^ر \quad ; ر = ١، ٢، ...., M = \alpha_١ ....\ (٥)$$

وأن هناك علاقة بينهما وهي:

$$M_ر = \sum_{ن=}^{ر}(-١)^ن جـ_ر^ن M^ن \alpha_{ر-ن} ....(٦)$$

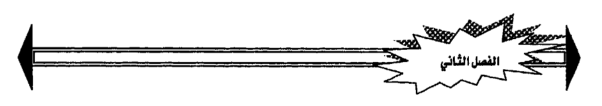
وأن العلاقة (٦) موجودة أيضاً بين العزوم الابتدائية والعزوم المركزية للعينة:

$$M_ر = \sum_{ن=}^{ر}(-١)^ك جـ_ر^ن \overline{س}^ن م_{ر-ن} \quad ; \quad جـ_ر^ن = \frac{ر!}{ن!(ر-ن)!} ....(٧)$$

وبإعطاء ر = ٢، ٣، ٤ نجد: $ل^٢ = م_٢ - \overline{س}^٢$، $م_{٣م} = م_٣ - ٣\overline{س}م_٢ + ٢\overline{س}^٣$

$$م_{٤م} = م_٤ - ٤\overline{س}م_٣ + ٦م_٢\overline{س}^٢ - ٣\overline{س}^٤ \quad ....\ (٨)$$





متوسط وتباين متوسط العينة

Mean and Variance of Sample Mean

نفترض س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع ق(س) بمتوسط M وتباين σ^2، ونريد تعيين القيمة المتوقعة والتباين لمتوسط العينة $\overline{س}$.

لدينا حسب التعريف (العلاقة (٢)):

$$\overline{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي = \frac{1}{ن}(س_1 + ... + س_ن)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للطرفين، نجد:

$$و\overline{س} = \frac{1}{ن}(وس_1 + ... + وس_ن)$$

لكن س١، ... ، سن متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها التوزيع ق(س)، إذن:

$$وس_1 = وس_2 = ... = وس_ن = M$$

وبالتالي:

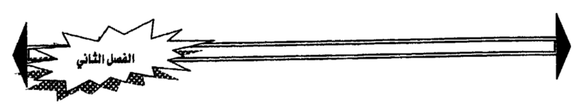
$$و\overline{س} = \mu \quad .... (1)$$

إيجاد تباين $\overline{س}$:

بما أن تباين $\overline{س} = و(\overline{س} - و\overline{س})^2 = و(\overline{س} - M)^2$

و $\overline{س} - M = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \mu)$

فإن تباين $\overline{س} = و\left[\frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - M)\right]^2$



$$= \frac{1}{ن^{2}} \sum_{ي=1}^{ن} و(س_{ي} - M)^{2} + \frac{1}{ن^{2}} \sum_{ي \neq ر} و[(س_{ي} - M)(س_{ر} - M)]$$

لكن حسب تعريف العينة العشوائية، فالمتغيرات $س_{ي}$؛ ي = ١، ٢،... ، ن ولها نفس التوزيع، إذن:

$$و(س_{ي} - M)^{2} = \sigma^{2} \text{ ؛ ي = ١، ... ، ن}$$

$$(س_{ي}، س_{ر}) = و[(س_{ي} - M)(س_{ر} - M)] = ٠ \text{ ؛ ي} \neq \text{ر} \quad .... (٣)$$

وبالتعويض في (٢)، نجد:

$$\text{تباين } \bar{س} = ت\bar{س} = \frac{\sigma^{2}}{ن} \quad .... (٤)$$

متوسط وتباين تباين العينة

Mean and variance of sample variance

لنتأمل الآن تباين العينة، المعرف بالعلاقة (٤):

$$م^{2} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} (س_{ي} - \bar{س})^{2} \qquad = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} \left[(س_{ي} - M) - \frac{1}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - M)\right]^{2}$$

$$= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} \left\{ (س_{ي} - M)^{2} - \frac{2}{ن}(س_{ي} - M) \sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - M) + \frac{1}{ن^{2}} \left[\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - M)\right]^{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} (س_{ي} - M)^{2} - \frac{2}{ن^{2}} \left[\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - M)\right]^{2} + \frac{1}{ن^{2}} \left[\sum_{ر=1}^{ن} (س_{ر} - M)^{2}\right]$$



$$= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - M)^2 - \frac{1}{ن^2} \left[\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - M) \right]^2$$

$$= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - M)^2 - \frac{1}{ن^2} \left[\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - M)^2 + \sum_{ي \neq ر} (س_ي - M)(س_ر - M) \right]$$

$$= \frac{ن-1}{ن^2} \sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - M)^2 - \frac{1}{ن^2} \sum_{ي \neq ر}^{ن} (س_ي - M)(س_ر - M)$$

بأخذ القيمة المتوقعة والاستفادة من (٣)، نجد:

$$و م^2 = \frac{ن-1}{ن} \sigma^2 \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

إيجاد تباين $م^2$:

كما نعلم: تباين $م^2$ = $وم^4 - (وم^2)^2$

ولحساب $وم^2$ نضع $ص_ي = س_ي - M$ في عبارة $م^2$ ثم نربعها، فنجد:

$$م^2 = \frac{ن-1}{ن^2} \sum_{ي=1}^{ن} ص_ي^2 - \frac{1}{ن^2} \sum_{ي \neq ر}^{ن} ص_ي ص_ر$$

$$م^4 = \frac{(ن-1)^2}{ن^4} \left(\sum_{ي=1}^{ن} ص_ي^2 \right)^2 + \frac{1}{ن^4} \left(\sum_{ي \neq ر}^{ن} ص_ي ص_ر \right)^2 - \frac{2(ن-1)}{ن^4} \sum_{ي=1}^{ن} ص_ي^2 \sum_{ي \neq ر}^{ن} ص_ي ص_ر$$

وبما أن $وص_ي = وس_ي - M = 0$

فبأخذ توقع $م^4$ نجد:

$$و م^4 = \frac{(ن-1)^2}{ن^4} \sum_{ي=1}^{ن} وص_ي^4 + \frac{(ن-1)^2}{ن^4} \sum_{ي \neq ر}^{ن} وص_ي^2 وص_ر^2 + \frac{2}{ن^4} \sum_{ي \neq ر}^{ن} وص_ي^2 وص_ر^2$$



$$= \frac{(ن-١)^{٢}}{ن^{٣}} M_{٤} + \frac{(ن-١)^{٢}+٢}{ن^{٣}} (ن-١) M_{٢}^{٢}$$

وبالتالي: تباين $م^{٤}$ = $وم^{٤} - (وم^{٢})^{٢}$

$$= \frac{(ن-١)^{٢}}{ن^{٣}} M_{٤} + \frac{(ن-١)^{٢}+٢}{ن^{٣}} (ن-١) M_{٢}^{٢} - \frac{(ن-١)^{٢}}{ن^{٢}} M_{٢}^{٢} \;.......... (٢)$$

$$= \frac{(ن-١)^{٢}}{ن^{٣}} \left(M_{٤} - \frac{ن-٣}{ن-١} M_{٢}^{٢}\right) ؛ M_{٢} = \sigma^{٢}$$

يمكن تلخيص ما سبق على النحو الآتي:

إذا كانت س = ($س_{١}$، ... ، $س_{ن}$) عينة من توزيع ق(س) بمتوسط M وتباين $\sigma^{٢}$، فإن متوسط وتباين متوسط العينة $\overline{س}$ هما:

$$و\overline{س} = M \text{ ، تباين } \overline{س} = \frac{\sigma^{٢}}{ن}$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان العزم المركزي من المرتبة الرابعة لتوزيع المجتمع منتهي، عندئذٍ تباين العينة $م^{٢}$ له متوسط وتباين هما:

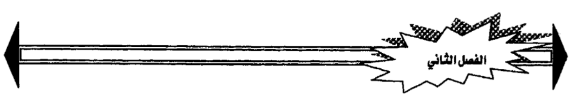
$$س\, و\, م^{٢} = \frac{ن-١}{ن} \sigma^{٢}$$

$$\text{تباين } م^{٢} = \frac{(ن-١)^{٢}}{ن^{٣}} \left(M_{٤} - \frac{ن-٣}{ن-١} \sigma^{٤}\right)$$

ملاحظة: يستخدم عادة في التطبيقات الإحصائية تباين العينة المعدل $م^{*٢}$.

$$م^{*٢}(س) = \frac{ن}{ن-١} م^{٢}(س) \;.. (٣)$$





وبالتالي:

$$\text{و م}^{2} = \text{و}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}\text{م}^{2}\right) = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}\text{و م}^{2} = \sigma^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

$$\text{تباين م}^{*2} = \text{تباين}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}\text{م}^{2}\right) = \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}\right)^{2}\text{تباين م}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥)$$

$$\frac{1}{\text{ن}}\left(M_{4} - \frac{\text{ن}-3}{\text{ن}-1}\sigma^{2}\right).$$

ومبرر استخدام م^{*2} في التطبيقات الإحصائية هو أن $\text{وم}^{*2} = \sigma^{2}$، وهذا يعني م^{*2} مقدّر غير متحيز للتباين، وتجاوزاً يدعى م^{*2} بتباين العينة $\text{س} = (\text{س}_1، \ldots، \text{س}_{\text{ن}})$

* توزيعات المعاينة لمجموع ومتوسط عينة

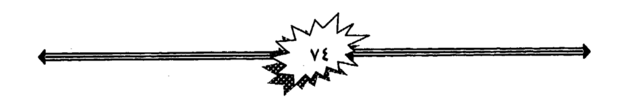
Sampling Distributions of sample Sun and Mean

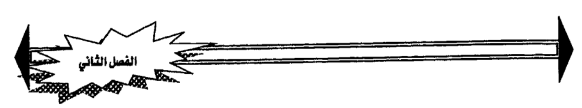
سنحتاج في موضوعات قادمة لمعرفة توزيع مجموع ومتوسط عينة عشوائية، ولإيجاد ذلك هناك طريقتان سنتطرق إلها في الفقرتين التاليتين.

طريقة التكرار:

لدراسة طريقة التكرار لإيجاد توزيع مجموع ومتوسط عينة، وللتبسيط نفترض أولاً أن العينة بحجم ن = ٢، إذا رمزنا بـ $\text{ج}_2(\breve{\text{ع}})$ لدالة توزيع المجموع $\breve{\text{ع}} = \text{س}_1 + \text{س}_2$، فإن:

$$\text{ج}_2(\text{ع}) = \text{ح}(\text{س}_1 + \text{س}_2 < \text{ع}) = \int_{\text{د}} \text{د}\left(\text{ق}(\text{س}_1)\,\text{ق}(\text{س}_2)\right)$$





حيث إن د = {(س١، س٢) ∈ ح٢ ؛ س١ + س٢ < ع}، وبما أن س١، س٢ متغيرين عشوائيين مستقلين، يمكننا كتابة:

$$ج_٢(ع) = \int_د د(ق(س_١)ق(س_٢)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{ع-س_١} دق(س_٢) \right] دق(س_١)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ق(ع - س_١)دق(س_١) \quad .... (١)$$

ويمكن تعميم ذلك على مجموع عينة حجمها ن>٢ فنجد:

$$ج_ن(ع) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{ع-(س_١+...+س_{ن-٢})} \int_{-\infty}^{ع-(س_١+...+س_{ن-٢})} ق_{(ع-س_١-...-س_{ن-١})} دق(س_{ن-١})دق(س_{ن-٢})...دق(س_١) \; ... \; (٢)$$

وإذا رمزنا بـ $هـ_ن(\overline{س})$ لدالة توزيع متوسط العينة $\overline{س}$، فإن:

$$هـ_ن(\overline{س}) = ج_ن(ن\overline{س})$$

مبرهنة: إذا كانت س = (س١، ... ، س٢) عينة عشوائية من توزيع ق(س؛Θ)، وكانت φ(ت، Θ) الدالة المميزة للتوزيع ق(س؛Θ)، فإن الدالة المميزة لمجموع العينة ع = س١ + ... + سن:

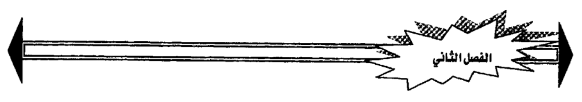
$$\varphi_ع(ت؛\Theta) = [\varphi(ت؛\Theta)]^ن \quad .... (٧)$$

والدالة المميزة لمتوسط العينة $\overline{س}$:

$$\varphi_{\overline{س}}(ت؛\Theta) = \left[\varphi(\frac{ت}{ن}؛\Theta)\right]^ن \quad .... (٨)$$

مبرهنة: بفرض س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع ق(س؛ Φ) دالته المميزة φ(ت، Θ). عندئذٍ إذا كان:





$$\left[\varphi(ت؛\Theta)\right]^{ن} = \varphi_{ع}(ت؛ن_{\Theta})$$

فإن توزيع مجموع العينة Ŭ ومتوسط العينة $\overline{س}$ هو من الشكل ق(Ŭ؛ نΘ) و ق(ن$\overline{س}$ ؛ نΘ) على الترتيب.

مبرهنة: إذا كان العزم الابتدائي من المرتبة ر للمتغير العشوائي Ŭ موجوداً، فإن:

$$\varphi(ت) = ١ + \sum_{ي=١}^{ن} \frac{(ي ت)^{ن}}{ن!} \alpha_{ك} + (٠)(ت^{ر})$$

حيث إن:

$$\lim_{ت \to \infty} \frac{(٠)(ت^{ر})}{(ت^{ر})} = (٠)$$

❖ توزيعات المعاينة لمجموع ومتوسط عينة في بعض الحالات الخاصة

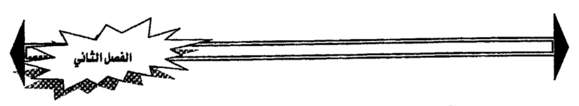
يمكننا الآن باستخدام الدالة المميزة وبعض خواصها الأساسية معرفة توزيع المعاينة لمجموع ومتوسط عينة في بعض الحالات الخاصة والهامة، التي سنحتاجها في فصول لاحقة.

١- إذا كانت العينة العشوائية س = (س$_{١}$، ... ، س$_{ن}$) من توزيع بيرنولي ب(١،Θ)، فإن توزيع المعاينة للمجموع $ع = \sum_{ي=١}^{ن} س_{ي}$ هو توزيع ذي الحدين ب(ن، Θ). إن الدالة المميزة للتوزيع ب(١،Θ) هي:

$$\varphi(ت) = \left[(١-\Theta) + \Theta هـ^{ي ت}\right]$$

وحسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٧)]، فإن الدالة المميزة لـ $ع = \sum_{ي=١}^{ن} س_{ي}$:





$$\varphi_{ع}(ت) = \left[(1-\Theta) + \Theta هـ^{ت ي}\right]^{ن}$$

وهذه ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع ب(ن، Θ)، أي أن توزيع عَ هو ب(ن، Θ).

وحسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٨)] فالدالة المميزة لـ $\bar{س}$ هي:

$$\varphi_{\bar{س}}(ت؛ \Theta) = \varphi_{ع}\left(\frac{ت}{ن}؛ \Theta\right) = \left[(1-\Theta) + \Theta هـ^{\frac{ت ي}{ن}}\right]^{ن}$$

وهذه أيضاً الدالة المميزة لنموذج ذي الحدين ب(ن، Θ)، أي أن توزيع المعاينة لـ $\bar{س}$ هو توزيع ذي الحدين ب(ن، Θ).

٢- إذا كانت س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi_{(\Theta)}$، فإن توزيع المعاينة لـ ع $= \sum_{ي=1}^{ن} س_{ي}$ هو نموذج بواسون $\Pi_{(ن\Theta)}$.

إن الدالة المميزة للنموذج:

$\Pi_{(\Theta)}$ هي: $\varphi(ت؛ \Theta) = هـ^{-\Theta(1 - هـ^{ي ت})}$

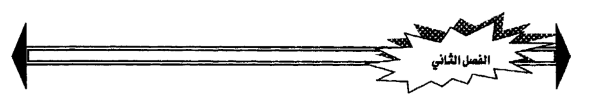
ومنها حسب المبرهنة (٣) [العلاقة (٧)] فالدالة المميزة لـ عَ هي:

$$\varphi_{ع}(ت؛ \Theta) = هـ^{-ن\Theta(1 - هـ^{ي ت})} \quad .... (11)$$

وهذه ما هي إلا الدالة المميزة لنموذج بواسون $\Pi_{(ن\Theta)}$، ومن ثم توزيع المعاينة لـ $\bar{س}$ هو أيضاً نموذج بواسون بمتوسط نΘ.

٣- إذا كانت س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من نموذج طبيعي عام





$ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2)$، فإن توزيع المعاينة لـ $ع = \sum_{1}^{ن} س_ي$ هو $ن(\Theta_1، \Theta_2^2)$ وتوزيع المعاينة لـ $\bar{س}$ يكون $ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2 / ن)$.

إن الدالة المميزة للتوزيع $ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2)$ هي: $\varphi(ت؛\Theta) = هـ^{ي\Theta_1 ت - \frac{1}{2}\Theta_2^2 ت^2}$ ؛ $\Theta = (\Theta_1، \Theta_2^2)$.

ومن ثم فالدالة المميزة لـ ص هي:

$$\varphi_ع(ت؛\Theta) = [\varphi(ت؛\Theta)]^ن = هـ^{ي ن\Theta_1 ت - \frac{1}{2} ن\Theta_2^2 ت^2} \quad .... (12)$$

وهذه الأخيرة ما هي إلا الدالة المميزة للنموذج $ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2)$، ومن ثم فهو توزيع المعاينة ع.

وللحصول على الدالة المميزة لـ $\bar{س}$ نستبدل ت بـ $\frac{ت}{ن}$ في $\varphi_ع(ت؛\Theta)$:

$$\varphi_{\bar{س}}(ت؛\Theta) = \varphi_ع(\frac{ت}{ن}؛\Theta) = هـ^{ي\Theta_1 ت - \frac{1}{2}(\frac{\Theta_2^2}{ن})ت^2} \quad .... (13)$$

وهذه الدالة المميزة للنموذج $ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2 / ن)$، أي أن توزيع المعاينة لـ $\bar{س}$ هو من الشكل $ن^{(1)}(\Theta_1، \Theta_2^2 / ن)$.

٤- إذا كانت $(ص_1، ....، ص_ن)$، حيث ي = ١، ٢، ....، ن؛ $ص_ي = (س_{1ي}، ....، س_{كي})$، عينة عشوائية من توزيع طبيعي ذي ك بعد $ن^{(1)}(M، \Sigma)$؛ $M = (M_1، ....، M_ك)$، $\Sigma = ||\alpha_{ير}||$؛ ي، ر = ١، ....، ك

فإن توزيع المعاينة لمتجه المجاميع $ع_ر = \sum_{ي=1}^{ن} س_{ري}$ ، ر = ١، ٢، ...، ك ؛ $(ص_1، ....، ص_ك)$ هو التوزيع الطبيعي $ن^{(1)}(ن M، ن \Sigma)$ وتوزيع المعاينة لمتجه



المتوسطات $ن^{(1)}(M، \frac{1}{ن}\Sigma)$ يكون (س$_1$، ... ، س$_ن$) ؛ $\overline{س}_ر = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_{ري}$.

الإثبات هنا، مشابه للحالة (٣)، ولذا نترك ذلك للقارئ على سبيل المثال.

٥- إذا كانت (س$_1$، ... ، س$_ن$) عين عشوائية من توزيع $\Gamma(\alpha، 1)$، فإن توزيع المعاينة لـ $ع = \sum_{ي=1}^{ن} س_ي$ هو توزيع جاما $\Gamma(ن\alpha، 1)$.

الدالة المميزة لنموذج $\Gamma(\alpha، 1)$ هي: $\varphi(ت؛ \alpha) = (1 - ي\, ت)^{-\alpha}$

ومن ثم فالدالة المميزة لـ ع هي:

$$\varphi_ع(ت؛ \alpha) = (1 - ي\, ت)^{-ن\alpha} \qquad (14)$$

وهي الدالة المميزة لتوزيع $\Gamma(ن\alpha، 1)$، وللحصول على الدالة المميزة لمتوسط المعادلة $\overline{س}$، نستبدل ت بـ $\frac{ت}{ن}$ في عبارة $\varphi_ع(ت؛ \alpha)$، فنجد:

$$\varphi_{\overline{س}}(ت؛ \alpha) = \varphi_ع\left(\frac{ت}{ن}؛ \alpha\right) = \left(1 - ي\frac{1}{ن}ت\right)^{-ن\alpha} \qquad (15)$$

وهي عبارة عن الدالة المميزة لتوزيع جاما $\Gamma(ن\alpha، 1/ن)$

٦- إذا كانت (س$_{11}$، .... ، س$_{1ن1}$) ، ... ، (س$_{ك1}$، ... س$_{كنك}$) عبارة عن ك عينة مستقلة من التوزيعات الطبيعية $ن^{(1)}(\Theta_{11}، \Theta^2_{12})$ ، $ن^{(1)}(\Theta_{21}، \Theta^2_{22})$، .... ، $ن^{(1)}(\Theta_{ك1}، \Theta^2_{ك2})$ على الترتيب، وكان $\overline{س}_1$ ...، $\overline{س}_ن$ متوسطات هذه العينات على الترتيب، جـ$_1$، .... ، جـ$_ك$ ثوابت (ليست كلها أصفاراً)، فعندئذٍ توزيع المعاينة لـ:

$ص = جـ_1\overline{س}_1 + ... + جـ_ك\overline{س}_ك$ هو التوزيع الطبيعي:

$$ن^{(1)}\left(\sum_{ي=1}^{ك} جـ_ي \Theta_{1ي}\ ،\ \sum_{ي=1}^{ك} \frac{جـ_ي^2 \Theta_{2ي}^2}{ن_ي}\right)$$

باستخدام الدوال المميزة نحصل على المطلوب مباشرة.

نلاحظ، بوضع $جـ_1 = 1$، $جـ_2 = -1$، $جـ_3 = \dots = جـ_ك = 0$، نحصل على النتيجة التالية:

توزيع المعاينة للفرق $\overline{س}_1 - \overline{س}_2$ بين متوسطي عينتين مستقلتين ($س_{12}$، ....، $س_{2ن2}$)، ($س_{11}$، .... ، $س_{1ن1}$) مأخوذتين من توزيعين طبيعيين.

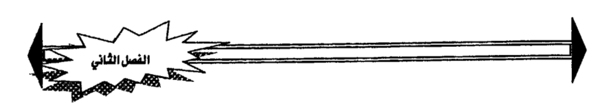
$ن^{(1)}(\Theta_{21}، \Theta_{22}^2)$ و $ن^{(1)}(\Theta_{11}، \Theta_{12}^2)$ على الترتيب هو التوزيع الطبيعي:

$$ن^{(1)}\left((\Theta_{11} - \Theta_{21}) = (\ ،\ \frac{\Theta_{12}^2}{ن_1} + \frac{\Theta_{22}^2}{ن_2}\right)$$

❖ توزيعات المعاينة لصيغ تربيعية معينة في عينات من توزيع طبيعي

بحثنا في الفقرة السابقة (٣) توزيعات المعاينة الأساسية لمجاميع ومتوسطات عينات عشوائية، وبشكل خاص مجاميع ومتوسطات عينات عشوائية (صيغ خطية في عناصر العينة) من توزيعات طبيعية (الحالات ٣، ٤، ٦)، سنعالج في هذا البند توزيعات المعاينة لمجموع مربعات (صيغ تربيعية) في عناصر العينة العشوائية كالتباين وصيغ تربيعية أخرى للعينات من توزيع طبيعي وحيد البعد.

سنعرض في البداية بعض التعاريف والمبرهنات الضرورية لدراسة الصيغ التربيعية في متغرات عشوائية طبيعية وتوزيعات المعاينة لها.



* الصيغ الخطية والتربيعية في متغيرات عشوائية طبيعية

Linear A quadratic Forms in Normal Random Variables

نفترض أن س = (س$_1$، ... ، س$_ن$) متغيراً عشوائياً ذا ن بعد، وأ=||أ$_{ير}$||^ن مصفوفة حقيقية متناظرة من المرتبة ن × ن. يدعى المقدار ج = س^ت أ س بالشكل التربيعي في المتغيرات س$_ي$؛ ي = ١، ...، ن، وعندئذٍ تدعى أ بمصفوفة الشكل التربيعي، وإذا كانت المصفوفة أ محددة موجبة (|أ|≠٠)، فإن الشكل التربيعي جـ محدد موجب، نلاحظ أن:

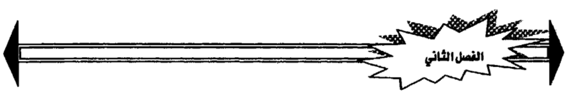
$$جـ = س^ت أ س = \sum_{ي=1}^{ن}\sum_{ر=1}^{ن} أ_{ير} س_ي س_ر$$

وس^ت منقول س.

ويدعى المقدار ت$_ك$ = $\sum_{ي=1}^{ن}$ ب$_{كي}$س$_ي$ بالشكل الخطي في المتغيرات س$_ي$، حيث ب$_{ك ي}$ أعداد ثابتة. وإذا كان لدينا م شكل خطي ت$_ك$؛ ك = ١، ......، م، فيمكننا كتابته بصيغة المصفوفات على النحو ت = ب س، حيث ب = ||ب$_{ك ي}$|| مصفوفة مستطيلة من المرتبة م × ن، وفيما يلي سنرمز بـ (٠) للمصفوفة الصفرية (zero matrix or null matrix) و بـ و$_ن$ للمصفوفة المحايدة أو الواحدية (ideutity) والدليل ن يشير إلى مرتبة المصفوفة.

مبرهنة: بفرض س = (س$_1$، ... ، س$_ن$) عينة عشوائية من التوزيع ن[1](٠، ١)، ولدينا الشكل التربيعي ج = س^ت أ س و م صيغة خطية ت = ب س. عندئذٍ إذا كان ب أ = ٠، فإن المتغيرين ج و ت$_ك$ ؛ ك = ١، ... ، م مستقلان.





الإثبات: بما أن أ مصفوفة حقيقية متناظرة، فهي قابلة التقاطر تعامدياً (orthogonally diagonalizable) أي يمكن إيجاد مصفوفة متعامدة (orthogonal matrix) (ل^{ت}ل= و$_{ن}$)ل، بحيث إن ل^{ت} أ ل= د مصفوفة قطرية عناصرها $\lambda_{ي}$؛ ي = ١، ....، ن عبارة عن القيم الذاتية للمصفوفة أ (حلول المعادلة المميزة |أ − λو$_{ن}$| = ٠)، وتعتبر الأعمدة ل$_{ر}$ للمصفوفة ل = ||ل$_{١}$ل$_{٢}$...ل$_{ن}$|| المتجهات الذاتية للمصفوفة أ الموافقة للقيم الذاتية $\lambda_{١}$،...، $\lambda_{ن}$ على الترتيب، أي أن:

أ ل$_{ر}$ = $\lambda_{ر}$ل$_{ر}$؛ ر= ١، ... ، ن

يفهم في لغة المصفوفات المتجه كمصفوفة عمود ل^{ت} أو ل$'$ منقول المصفوفة ل.

لتكن ر رتبة المصفوفة أ (درجة أ) و $\lambda_{١}$، ...، $\lambda_{ر}$ القيم الذاتية لها المختلفة عن الصفر، وبما أن ل^{ت} أل= د، فيمكن كتابته:

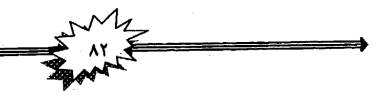
$$أ=ل د ل^{ت} = \sum_{ي=١}^{ر} \lambda_{ي} ل_{ي} ل_{ي}^{ت} \quad .... (٢)$$

وحسب الفرض:

$$ب أ = ٠ \Leftarrow \sum_{ي=١}^{ر} \lambda_{ي} (ب ل_{ي}) ل_{ي}^{ت} = ٠$$

وبضرب طرفي المساواة الأخيرة من اليمين بالمتجه ل$_{م}$، وباعتبار أن المتجهات ل$_{ر}$ متعامدة (لأن المصفوفة ل متعامدة)، أي أن ر $\neq$ م؛ ل$_{ر}^{ت}$ل$_{م}$، نجد:

ب ل م = ٠، م = ١، ٢، ....، ر .... (٣)



لنأخذ الآن المتجه العشوائي ($ت_{1}$، ... ، $ت_{م}$، $ل_{1}^{ت}س$، ... ، $ل_{ر}^{ت}س$)، يخضع هذا المتجه للتوزيع الطبيعي ذي م + ر بعد، لأن مركباته (متغيرات عشوائية عبارة عن أشكال خطية في المتجه الطبيعي س.

ويمكن بناءً على العلاقة (٢) كتابة:

$$ج = س^{ت} أ س = \sum_{ي=1}^{ر} \lambda_{ي} (س^{ت} ل_{ي}) (ل_{ي}^{ت} س) = \sum_{ي=1}^{ر} \lambda_{ي} (ل_{ي}^{ت} س)^{2} \quad .... (٤)$$

وبالتالي، نصل إلى المطلوب، إذا أمكن إثبات أن المتغيرات العشوائية $ت_{1}$، ... ، $ت_{م}$، $ل_{1}^{ت}س$، ... ، $ل_{ر}^{ت}س$ غير مرتبطة، وذلك لأنها خاضعة لتوزيعات طبيعية، أي يكفي إثبات أن:

($ت_{ي}$، $ل_{ن}^{ت}س$)=٠؛ ي = ١، .... ، م، ن = ١، ...، ر.

وهذا يعني أن $ت_{ي}$، $ل_{ن}^{ت}س$ مستقلان.

لإثبات ذلك، لنرمز بـ $ب_{ي}^{ت}$ ؛ ي = ١، ... ، م لأسطر المصفوفة ب، وحسب العلاقة (٢٣) نجد:

$$(ت_{ي}، ل_{ر}^{ت}س) = (ب_{ي}^{ت}س، ل_{ر}^{ت}س)$$

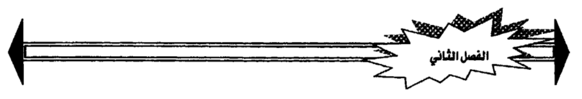
$$= و(ب_{ي}^{ت}س ل_{ر}^{ت}س) - و(ب_{ي}^{ت}س) و(ل_{ر}^{ت}س)$$

$$= و(ب_{ي}^{ت}س ل_{ر}^{ت}س) = ب_{ي}^{ت} و(س س^{ت}) ل_{ر}$$

$$= ب_{ي}^{ت} و_{ن} ل_{ر} = ٠$$

حيث إن و($ب_{ي}^{ت}س$)=و($ل_{ر}^{ت}س$)=٠، لأن توزيع $س_{ي}$ هو ن[1](٠، ١)، و$ب_{ي}^{ت}ل_{ر}$ =٠ لأن ر = ١، ... ، ن؛ ب $ل_{ر}$ = ٠ [العلاقة (٣)] وهو المطلوب.





لنرى الآن الشكلين التربيعيين:

$ج_1 = س^ت أ س$ ، $ج_2 = س^ت ب س$

حيث كل من أو و ب مصفوفة حقيقية متناظرة من المرتبة ن.

مبرهنة: إذا كان أب = ب أ = ٠، فإن المتغيرين العشوائيين ج١، ج٢ مستقلان.

الإثبات: لنفترض من أجل المصفوفة أ العلاقة (٢) صحيحة. ويمكننا كتابة المصفوفة ب على النحو الآتي:

$$ب = \sum_{ي=1}^{م} \upsilon ع_ر ع_ر^ت \quad ؛ م = \text{درجة ب}$$

وحسب الفرض أ ب = ٠، إذن: $أب = \sum_{ي=1}^{ن} \sum_{ر=1}^{م} \lambda_ي \upsilon_ر ل_ي (ل_ي^ت ع_ر) ع_ر^ت = ٠$

وبضرب هذه المساواة من اليسار بـ $ل_ي^ت$ ومن اليمين بـ $ع_ر$، نجد:

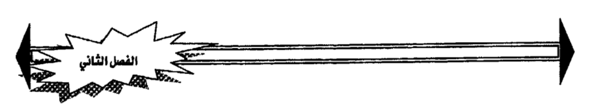
$ل_ي^ت ع_ر = ٠$ ي = ١، ... ، ن، ر = ١، ... ، م

وهذا يعني أن المتجهات $ل_ي$ متعامدة مع المتجهات $ع_ر$، من هنا، كما أشرنا سابقاً، فالمتغيرات العشوائي $ل_ي^ت س$ و $ع_ر^ت س$ غير مرتبطة، وبما أن توزيعها المشترك طبيعي فإنها مستقلة. وبالتالي، بما أن:

$$ج_1 = \sum_{ي=1}^{ن} \lambda_ي (ل_ي^ت س)^2 \quad ، \quad ج_2 = \sum_{ر=1}^{م} \lambda_ر (ع_ر^ت س)^2$$

فإن المتغيرين ج١، ج٢ مستقلان.





***توزيعات المعاينة لصيغ تربيعية في متغيرات عشوائية طبيعية.**

لنرمز بـ ترأ لأثر المصفوفة المربعة أ (مجموع عناصرها القطرية).

مبرهنة: لتكن س = (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من التوزيع ن[1] (٠،١)، ج = س^ت أ س و ر ≤ ن رتبة المصفوفة أ. إذا كانت أ = أ^٢ (أ مصفوفة متساوية القوى)، فإن ر = ترأ ؛ ل(ج)=س^٢(ر)

الإثبات: لنفترض من أجل أ العلاقة (٢) صحيحة، عندها من خاصية التناظر ومتساوية القوى نجد أن λ_1، λ_2 = ... = $\lambda_ر$ = ١، وبناءً على العلاقة (٤) نجد:

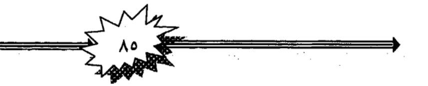
$$ج = \sum_{ك=١}^{ر} (ل_ك^ت س)^٢$$

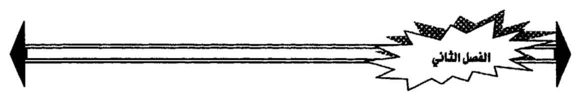
وبما أن المتجهات لك متعامدة ومستقلة، فإن المتغيرات العشوائية $ل_ك^ت س$، ك = ١، ... ، ر مستقلة ولكل منها التوزيع الطبيعي ن[1](٠، ١). وبالتالي، بناءً على المبرهنتين (٦) و (٧) لتوزيع كاي $\lambda^٢$ فإن ل(ج)=$\lambda^٢_{(ر)}$، وأن:

$$ترأ = تر (ل^٢ل د) = ترد = \lambda_١ + ... + \lambda_ر = ر$$

مبرهنة: إذا كان المتجه ص = (ص١، .... ، صن) خاضعاً للتوزيع ن[1](M، Σ)، فإن الشكل التربيعي ج=(ص − M) ^تΣ(ص − M) يخضع لتوزيع $\lambda^٢_{(ن)}$. حيث إن Σ مصفوفة التغاير و M مصفوفة القيم المتوقعة لـ $ص_ي$؛ ي = ١، ... ، ن.

الإثبات: بما أن Σ مصفوفة حقيقية ومتناظرة، فهي قابلة للتقاطر. وبالتالي





يمكن إيجاد المصفوفة ل التي تحول المصفوفة Σ إلى شكل قطري ل^{ت} Σ ل = د. وبما أن العناصر القطرية $\lambda_{ي}$ للمصفوفة د موجبة، فإن المصفوفة د$^{-1/2}$ عبارة عن المصفوفة القطرية بالعناصر $\lambda_{ي}^{1/2}$. لنبحث الآن عن توزيع المتجه.

$$ع = د^{-1/2} د^{ت}(ص - M)$$

بما أن ل(ص) = ن$^{(1)}$(M، Σ)، وبأخذ ع = ل ص، حيث ل مصفوفة التحويل الخطي، فإن ل(ع) = ن$^{(1)}$(لM، ل Σ ل^{ت})، وبالتالي:

$$ل(ع) = ن^{(1)}(٠، و_{ن})$$

لكن ص − M = ل د$^{1/2}$ع، إذن:

$$ج = ع د^{1/2} ل^{ت} \Sigma^{-1} ل د^{1/2} ع = ع^{ت} و_{ن} ع = ع^{ت} ع$$

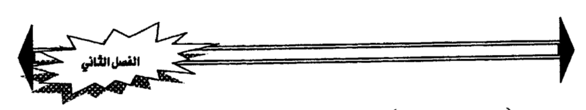
وبناءً على المبرهنتين (٦) و(٧) لتوزيع λ^{2}، نجد:

$$ل(ج) = \lambda^{2}_{(ن)}$$

مبرهنة: إذا كانت س = (س$_{1}$، ... ، س$_{ن}$) عينة عشوائية من التوزيع ن$^{(1)}$(M، σ^{2}) وكان $\bar{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_{ي}$ و م^{2}(س) $= \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_{ي} - \bar{س})^{2}$ متوسط وتباين العينة س على الترتيب، فإنهما مستقلان وتوزيع المتغير العشوائي $\frac{ن م^{2}}{\sigma^{2}}$ هو $\lambda^{2}_{(ن-1)}$.

الإثبات: بما أن (حسب الفرض): ل(س$_{ي}$) = ن$^{(1)}$(M، σ^{2})، ي = ١، ٢، ...، ن فإن:





$$ل\left(ص_ي = \frac{س_ي - M}{\sigma}\right) = ن^{(1)}(0,1)،\ ي = 1، 2، \dots، ن$$

أي أن ص = (ص١، .... ، صن) عينة عشوائية من التوزيع $ن^{(1)}(0، 1)$، ونلاحظ أن:

$$\overline{ص} = \frac{\overline{س} - M}{\sigma} \quad ، \quad م^2(ص) = \frac{م^2(س)}{\sigma^2}$$

ولإثبات استقلال المتغيرين $م^2(س)$، $\overline{س}$ يكفي إثبات استقلال المتغيرين $م^2(ص)$، $\overline{ص}$.

لنأخذ مصفوفة السطر $ب^{ت} = \left[\frac{1}{ن} \dots\dots \frac{1}{ن}\right]$ من المرتبة ١ × ن، عندئذٍ المصفوفة ب = ||ب...ب|| من المرتبة ن حقيقية ومتناظرة.

نلاحظ $\overline{ص} = ب^{ت}ص$ و $ن\ م^2(ص) = (ص - ب\ ص)^{ت}(ص - ب\ ص)$، وبالتالي يمكننا أن نكتب $ن\ م^2(ص) = ص^{ت}\ أ\ ص$، حيث إن $أ = و_ن - ب$ مصفوفة متساوية القوى.

بما أن $ب^{ت}أ = ب^{ت} - ب^{ت}ب = ب^{ت} - ب^{ت} = 0$، فإن ب أ = –، وحسب المبرهنة (١) فإن المتغيرين $م^2(ص)$، $\overline{ص}$ مستقلان، وبالتالي $م^2(س)$، $\overline{س}$ مستقلان.

من الواضح أن توزيع $\overline{ص} = \frac{\overline{س} - M}{\sigma / \sqrt{ن}}$ هو $ن^{(1)}(0، 1)$. وبما أن:

$$\frac{ن\ م^2(س)}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \overline{س})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{ي=1}^{ن}\left[(س_ي - M) - (\overline{ص} - M)\right]^2$$



$$= \sum_{ي=1}^{ن} \left(\frac{س_ي - M}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{س} - M}{\sigma / \sqrt{ن}} \right)^2$$

وحسب المبرهنتين (٦) و (٧) لتوزيع λ^2 فإن:

$$ل \left(\sum_{ي=1}^{ن} \left(\frac{س_ي - M}{\sigma} \right)^2 \right) = \lambda^2_{(ن)}$$

$$ل \left(\frac{\bar{س} - M}{\sigma / \sqrt{ن}} \right)^2 = \lambda^2_{(1)}$$

وبالتالي، بناءً على المبرهنة (٨) لتوزيع λ^2 نجد: $ل \left(\frac{ن م^2(س)}{\sigma^2} \right) = \lambda^2_{(ن-1)}$

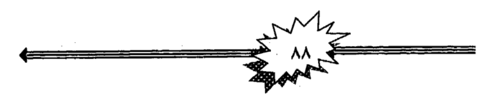
مبرهنة: إذا كانت س* = (س₁، ... ، سن) عينة عشوائية من التوزيع ن[1](M، σ²) وكان م²، $\bar{س}$ متوسط وتباين العينة س على الترتيب فإن:

$$ل \left(\frac{\bar{س} - M}{م / \sqrt{ن - 1}} \right) = م_{(ن-1)}$$

أي أن المتغير العشوائي $\frac{\bar{س} - M}{م / \sqrt{ن - 1}}$ يخضع لتوزيع ت بـ ن − ١ درجة حرية.

الإثبات: لنفترض أن: $ع = \frac{\bar{س} - M}{\sigma / \sqrt{ن}}$ ، $\eta = \frac{ن م^2(س)}{\sigma^2}$

وعلى ذلك: $$\frac{\bar{س} - M}{م / \sqrt{ن - 1}} = \frac{\frac{\bar{س} - M}{\sigma / \sqrt{ن}}}{\sqrt{\frac{ن م^2}{\sigma^2}} / (ن - 1)} = \frac{ع}{\sqrt{\frac{\eta}{(ن - 1)}}}$$



وبما أن: $\text{ل}\left(\text{ع}=\frac{\bar{\text{س}}-M}{\sigma/\sqrt{\text{ن}}}\right)=\text{ن}^{(1)}(\text{٠،١})$ ، $\text{ل}\left(\eta=\frac{\text{ن م}^{2}}{\text{م}/\sqrt{\text{ن}}}\right)=\lambda^{2}_{(\text{ن}-1)}$

إن حسب تعريف توزيع ت، فإن:

$$\text{ل}\left(\frac{\text{ن م}^{2}}{\text{م}/\sqrt{\text{ن}}}\right)=\text{م}^{2}_{(\text{ن}-1)}$$

مبرهنة: إذا كانت س = (س$_1$، ... ، س$_\text{م}$) و ص = (ص$_1$، ... ، ص$_\text{ن}$) عينتين عشوائيتين مستقلتين من التوزيع ن$^{(1)}$(M، σ^2)، وكان م^2(س)، $\bar{\text{س}}$ وم^2(ص)، $\bar{\text{ص}}$ متوسط وتباين كل منهما على الترتيب فإن المتغير العشوائي:

$$\text{ت}=\sqrt{\frac{\text{هـ ن}(\text{هـ}+\text{ن}-2)}{\text{هـ}+\text{ن}}}\ \frac{\bar{\text{س}}-\bar{\text{ص}}}{\sqrt{\text{هـ م}^{2}(\text{س})+\text{ن م}^{2}(\text{ص})}} \quad \text{.......................... (٥)}$$

يخضع لتوزيع ت بـ (هـ + ن − ٢) درجة حرية.

الإثبات: يمكن كتابة المتغير العشوائي ت على النحو الآتي:

$$\frac{\sqrt{\left[(\bar{\text{س}}-\bar{\text{ص}})/\sigma\right]\ \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ}+\text{ن}}}}{\sqrt{\frac{\text{هـ م}^{2}(\text{س})+\text{ن م}^{2}(\text{ص})}{\sigma^{2}}\Big/(\text{هـ}+\text{ن}-2)}}$$

حيث إن:

و$(\bar{\text{س}}-\bar{\text{ص}})=\text{٠}$، تباين $(\bar{\text{س}}-\bar{\text{ص}})=\frac{\text{هـ}+\text{ت}}{\text{هـ ن}}\sigma^{2}$

بما أن: $\text{ل}\left(\frac{\text{هـ م}^{2}(\text{س})}{\sigma^{2}}\right)=\lambda^{2}_{(\text{هـ}-1)}$ ، $\text{ل}\left(\frac{\text{ن م}^{2}(\text{ص})}{\sigma^{2}}\right)=\lambda^{2}_{(\text{ن}-1)}$

فحسب الخاصة (٢) لتوزيع λ^2 نجد:



$$\text{ل}\left(\frac{\text{هـ}\,\text{م}^2(\text{س}) + \text{ن}\,\text{م}^2(\text{ص})}{\sigma^2}\right) = \lambda^2_{(\text{هـ}+\text{ن}-2)}$$

وبسهولة يمكن إثبات أن:

$$\text{ل}\left(\frac{\bar{\text{س}} - \bar{\text{ص}}}{\sigma}\sqrt{\frac{\text{هـ}\,\text{ن}}{\text{هـ}+\text{ن}}}\right) = \text{ن}^{(1)}(0،1)$$

وبالتالي، بناءً على تعريف توزيع ت نجد أن توزيـع المتغير العـشوائي ت المعرف بالعلاقة (٥) هو م(هـ + ن − ٢)، أي أن:

$$\left(\frac{\sqrt{\left[(\bar{\text{س}} - \bar{\text{ص}})/\sigma\right]^2 \frac{\text{هـ}\,\text{ن}}{\text{هـ}+\text{ن}}}}{\sqrt{\frac{\text{هـ}\,\text{م}^2(\text{س}) + \text{ن}\,\text{م}^2(\text{ص})}{\sigma^2} \Big/ (\text{هـ}+\text{ن}-2)}}\right) = \text{م}(\text{هـ}+\text{ن}-2)$$

وبشكل مشابه، يمكن إثبات أن المتغير العشوائي:

$$\text{ت} = \frac{(\bar{\text{س}} - \bar{\text{ص}}) - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\text{هـ}\,\text{م}^2(\text{س}) + \text{ن}\,\text{م}^2(\text{ص})}}\sqrt{\frac{\text{هـ}\,\text{ن}(\text{هـ}+\text{ن}-2)}{\text{هـ}+\text{ن}}}$$

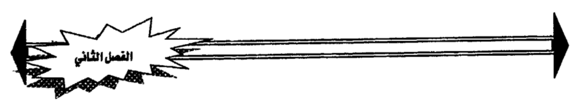
يخضع لتوزيع ت بـ (ه + ن − ٢) درجة حرية، حيث إن س = (س_1، ....، $\text{س}_\text{م}$) من التوزيع:

$\text{ن}^{(1)}(M_1، \sigma^2)$ و ص = (ص_1، ....، $\text{ص}_\text{ن}$) من التوزيع $\text{ن}^{(1)}(M_2، \sigma^2)$

*** *الإحصاءات المرتبة   The Order statistics***

تلعب نظرية المعاينة للإحصاءات المرتبة دوراً هاماً في مسائل مختلفة للاستدلال الإحصائي، التي ستتطرق إليها فيما بعد. لذا سنبحث في هذا البند بعض أهم نتائج نظرية المعاينة للإحصاءات المرتبة.





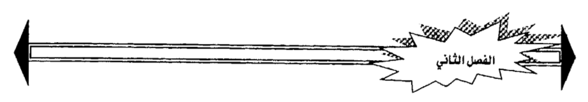
نفترض $س^* = (س_1، ...، س_ن)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر ق(س) و $س = (س_1، ...، س_ن)$ قيمة ملاحظة لـ $س^{(*)}$. إن القيم الملاحظة $س_1، ...، س_ن$ يمكن ترتيبها تصاعدياً حسب قيمها (من الأصغر إلى الأكبر) ولنرمز لها بـ $س_{(1)}، ...، س_{(ن)}$، حيث إن:

$$س_{(1)} \le س_{(2)} \le ... \le س_{(ن)} \quad .... (1)$$

ولنرمز بـ $س^{(*)}_{(ك)}$ للمتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة $س_{(ك)}$؛ ك = ١، ...، ن عند أي ملاحظة س للعينة $س^{(*)}$، وبذلك تعرف من العينة $س^{(*)}$ متتالية جديدة من المتغيرات العشوائية $س^{(*)}_{(1)}، س^{(*)}_{(2)}، ...، ...، س^{(*)}_{(ن)}$، حيث إن:

$$س^{(*)}_{(1)} \le س^{(*)}_{(2)} \le ... \le س^{(*)}_{(ن)} \quad .... (2)$$

تدعى المتغيرات الجديدة $س^{(*)}_{(ك)}$ ؛ ك = ١، ...، ن بالإحصاءات المرتبة للعينة، ويدعى المتغير $س^{(*)}_{(ك)}$ بالإحصاء ذو الترتيب ك، ومن ثم تدعى $(س^{(*)}_{(1)}، ...، س^{*}_{(ك)})$ بالعينة المرتبة، كما تدعى المتسلسلة المعرفة بالعلاقة (٢) بالمتسلسلة المتغيرة (variable sevy) للعينة $س^{(*)}$. وهذا يعني أن المتسلسلة المتغيرة لـ $س^{(*)}$ ما هي إلا عينة عناصرها مرتبة تصاعدياً حسب قيمها. ومن أجل ملاحظة س لـ $س^{(*)}$، فإن المتسلسلة المعرفة بالعلاقة (٢) تأخذ شكل المتسلسلة العددية المعرفة بالعلاقة (١). وهذه الأخيرة تعتبر الشكل الأولي لتمثيل المعطيات الإحصائية (العينة الملاحظة).



* التوزيع الاحتمالي الهامشي لإحصاء مرتب

The marginal probability distribution of an Individual Order Statistic

نقدم في هذه الفقرة التوزيعات الاحتمالية الهامشية للإحصاءات المرتبة $س_{(ك)}^{(*)}$، ك = ١، ... ، ن لعينة عشوائية $س^{(*)}$ مأخوذة من توزيع مستمر ق(س).

مبرهنة: إذا كانت $س^{(*)} = \left(س_{(1)}^{(*)}، ...، س_{(ن)}^{(*)}\right)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر ل(ع) دالة كثافته الاحتمالية ت(س) ودالة توزيعه هي:

$$ق(س) = ح(ع<س)$$

وكانت $ص_1 = س_{(1)}^{(*)}، ...، ص_ن = س_{(ن)}^{(*)}$ الإحصاءات المرتبة للعينة $س^{(*)}$، فإن التوزيع الاحتمالي للإحصاء المرتب $ص_ي = س_{(ي)}^{(*)}$ يعطى بدالة الكثافة:

$$هـ_ي(ص) = هـ(ص) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ن-ي)!} ق(ص)[ق(ص)]^{ي-1}[1-ق(ص)]^{ن-ي} \quad .... (٣)$$

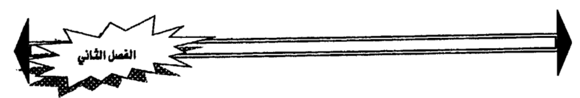
الإثبات:

حسب تعريف دالة الكثافة في نظرية الاحتمالات:

$$هـ(ص) = \lim_{\Delta ص \to 0} \frac{هـ^*(ص+\Delta ص) - هـ^*(ص)}{\Delta ص} = \lim_{\Delta ص \to 0} \frac{ح(ص \le ص_ي^* < ص + \Delta ص)}{\Delta ص}$$

حيث هـ(ص) و هـ*(ص) دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي صي على الترتيب، إن تحقق الحادث $ص \le ص_ي^* < ص + \Delta ص$ يعني أن (ي-١) من المركبات $س_ي^*$؛ ي = ١، ... ، ن للعينة س* أقل من ص ومركبة واحدة تنتمي للفترة [ص، ص+Δص) وأن (ن-ي) مركبة من س* أكبر أو تساوي ص+Δص. وباستخدام التوزيع المتعدد الحدود نجد:





$$ح(ص \geq ص_ي^{\bullet} < ص+\Delta ص)=\frac{ن!}{(ي-1)!\,1!\,(ن-ي)!}[ق(ص)]^{ي-1}[ق(ص+\Delta ص)-ق(ص)][1-ق(ص+\Delta ص)]^{ن-ي}$$

وبتقسيم الطرفين على Δص، وبأخذ النهاية عندما Δص ⟵ ٠، نجد:

$$\lim_{\Delta ص \to 0}\frac{ح(ص \geq ص_ي^{\bullet} < ص+\Delta ص)}{\Delta ص}=\frac{ن!}{(ي-1)!\,1!\,(ن-ي)!}[ق(ص)]^{ي-1}[1-ق(ص)]^{ن-ي}\lim_{\Delta ص \to 0}\frac{ق(ص+\Delta ص)-ق(ص)}{\Delta ص}$$

وبالتالي:

$$هـ_ي(ص)=\frac{ن!}{(ي-1)!\,1!\,(ن-ي)!}[ق(ص)]^{ي-1}[1-ق(ص)]^{ن-ي}$$ وهو المطلوب.

بوضع ي=١ في العلاقة (٣) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع $ص_1^{\bullet}=س_{(1)}^{\bullet}$:

$$هـ_1(ص)=\frac{ن!}{(ن-1)!}ق(ص)\,[1-ق(ص)]^{ن-1}=ن\,ق(ص)\,[1-ق(ص)]^{ن-1} \quad ..... (٤)$$

وبوضع ي = ن نحصل على دالة كثافة توزيع $ص_ن^{\bullet}=س_{(ن)}^{\bullet}$:

$$هـ_ن(ص)=ن\,ق(ص)\,[ق(ص)]^{ن-1} \quad .... (٥)$$

وبشكل مشابه نحصل على توزيع بقية الإحصاءات المرتبة.

مثال (١):

بفرض $س^{\bullet}=(س_1^{\bullet},...,س_ن^{\bullet})$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم م(٠، ١)، أوجد توزيع كل من $ص_1^{\bullet}=س_{(1)}^{\bullet}$، $ص_ن^{\bullet}=س_{(ن)}^{\bullet}$

بما أن دالة كثافة ودالة توزيع م(٠، ١) هي على الترتيب:

$$ق(س)=\begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq س \leq 1 \\ 0 & ; \quad س < 0 \quad أو \quad س > 1 \end{cases}$$



$$ق^{*}(س)=\begin{cases} ٠ & ؛ \quad س \leq ٠ \\ س & ؛ \quad ٠ < س \leq ١ \\ ١ & ؛ \quad س > ١ \end{cases}$$

فحسب العلاقة (٣) نجد دالة كثافة توزيع $ص_ي^{*}=س_{(ي)}^{*}$

$$هـ_ي(ص)=\frac{ن!}{(ي-١)!\,(ن-ي)!}ص^{ي-١}(١-ص)^{ن-ي} \quad ؛ \; ٠ < ص \leq ١$$

بوضع ي = ١ نحصل على توزيع $ص_١^{*}=س_{(١)}^{*}$

$$هـ_١(ص)=ن(١-ص)^{ن-١} \quad ؛ \quad ٠ < ص \leq ١$$

وبوضع ي = ن نحصل على توزيع $ص_ن^{*}=س_{(ن)}^{*}$

$$هـ_ن(ص)=ن\,ص^{ن-١} \quad ؛ \quad ٠ < ص \leq ١$$

مثال (٢):

إذا كانت $س^{*}=س_١^{*}،...،س_ن^{*}$ عينة عشوائية من توزيع أسي:

$ق(س؛ \Theta) = \Theta هـ^{-\Theta س}$ ؛ $س>٠$ ، $\Theta>٠$

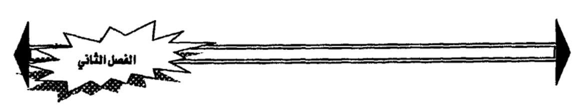
فأوجد توزيع كل من $ص_٢^{*}=س_{(٢)}^{*}$ و $ص_{ن-١}^{*}=س_{(ن-١)}^{*}$

بما أن حالة التوزيع الأسي:

$$ق(س؛\Theta)=\begin{cases} ٠ & ؛ \quad س \leq ٠ \\ ١-هـ^{-\Theta س} & ؛ \quad س > ٠ \end{cases}$$

فبالتعويض في العلاقة (٣) نجد توزيع $ص_ي^{*}=س_{(ي)}^{*}$

$$هـ_ي(ص)=\frac{ن!}{(ي-١)!(ن-ي)!}\Theta هـ^{-(ن+١-ي)\Theta س}\left(١-هـ^{-\Theta س}\right)^{ي-١} \quad ؛ \; س > ٠$$



بوضع ي = ٢، ن-١ نحصل على توزيع $\text{ص}^*_{٢}$ و $\text{ص}^*_{\text{ن}-١}$ على الترتيب.

$$\text{هـ}_{٢}(\text{ص}) = \text{ن}(\text{ن}-١)\Theta\, \text{هـ}^{-(\text{ن}-١)\Theta\text{س}}\left(١-\text{هـ}^{-\Theta\text{س}}\right) \quad ; \quad \text{س} > ٠$$

$$\text{هـ}_{\text{ن}-١}(\text{ص}) = \text{ن}(\text{ن}-١)\Theta\, \text{هـ}^{-٢\Theta\text{س}}\left(١-\text{هـ}^{-\Theta\text{س}}\right)^{\text{ن}-٢} \quad ; \quad \text{س} > ٠$$

* التوزيع المشترك لإحصائين مرتبين

The Joint Distribution of two order statistics

مبرهنة:

إذا كانت $\text{س}^* = (\text{س}_١^*، ...، \text{س}_\text{ن}^*)$ عينة عشوائية من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية ق(س) ودالة توزيعه ق*(س)، فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصائين المرتبين

$$\text{ص}^*_{\text{ي}} = \text{س}_{(\text{ي})} \quad ، \quad \text{ص}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{(\text{ر})} \quad ; \quad ١ \le \text{ي} < \text{ر} \le \text{ن}$$

$$\text{هـ}_{\text{ص}_\text{ي}\text{ص}_\text{ر}}(\text{س}،\text{ص}) = \text{هـ}_{\text{ي}\text{ر}}(\text{س}،\text{ص}) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ي}-١)!\,(\text{ر}-\text{ي}-١)!\,(\text{ن}-\text{ر})!}\,\text{ق}(\text{س})\text{ق}(\text{ص})\left[\text{ق}^*(\text{س})\right]^{\text{ي}-١}\left[\text{ق}^*(\text{ص})-\text{ق}^*(\text{س})\right]^{\text{ر}-\text{ي}-١}\left[١-\text{ق}^*(\text{ص})\right]^{\text{ن}-\text{ر}} \quad ....(٦)$$

الإثبات:

نعلم أن:

$$\text{هـ}_{\text{ي}\text{ر}}(\text{س}،\text{ص}) = \lim_{\substack{\Delta\text{س}\to ٠\\ \Delta\text{ص}\to ٠}} \frac{\text{ح}\left(\text{س} \le \text{ص}^*_{\text{ي}} < \text{س}+\Delta\text{س}، \text{ص} \le \text{ص}^*_\text{ر} < \text{ص}+\Delta\text{ص}\right)}{\Delta\text{س}\Delta\text{ص}}$$

وتحقق الحادث $\left(\text{س} \le \text{ص}^*_{\text{ي}} < \text{س}+\Delta\text{س}، \text{ص} \le \text{ص}^*_{\text{ي}} < \text{ص}+\Delta\text{ص}\right)$ يعني تحقق الحوادث:



$ص_{ك}^{ن} < س \quad ؛ \quad ك \le ي - ١$

$س \le ص_{ك}^{ن} < س + \Delta س \quad ؛ \quad ك = ي$

$س + \Delta س \le ص_{ك}^{ن} < ص \quad ؛ \quad ي < ك \le ر - ١$

$ص \le ص_{ك}^{ن} < ص + \Delta ص \quad ؛ \quad ك = ر$

$ص_{ك}^{ن} \le ص + \Delta ص \quad ؛ \quad ك > ر$

نلاحظ أننا أمام ن تكرار مستقل لتجربة مفروضة، فضاء الحوادث الأولية الموافق لها مجزأ إلى خمس حوادث متنافية مثنى مثنى، وهي الواردة أعلاه، وأن احتمالات هذه الحوادث على الترتيب:

$ح_{١} = ق(س)$

$ح_{٢} = ق(س + \Delta س) - ق(س)$

$ح_{٣} = ق(ص) - ق(س + \Delta س)$

$ح_{٤} = ق(ص + \Delta ص) - ق(ص)$

$ح_{٥} = ١ - ق(ص + \Delta ص)$

ومن ثم احتمال ظهور الحادث الأول (ي-١) مرة، الحادث الثاني مرة واحدة، الحادث الثالث (ر-ي-١) مرة، الحادث الرابع مرة واحدة والحادث الخامس (ن-ر) مرة ضمن الـ ن تكرار مستقل للتجربة المفروضة يعطى بقانون التوزيع المتعدد الحدود:

$$ح(س \le ص_{ي}^{ن} < س + \Delta س ، ص \le ص_{ي}^{ن} < ص + \Delta ص) = \frac{ن!}{(ي-١)!\,(ر-ي-١)!\,(ن-ر)!}\left[ق(س)\right]^{ي-١}\left[ق(س + \Delta س) - ق(س)\right]$$

$$\times\left[ق(ص) - ق(س + \Delta س)\right]^{ر-ي-١}\left[ق(ص + \Delta ص) - ق(ص)\right]\left[١ - ق(ص + \Delta ص)\right]^{ن-ر}$$

بتقسيم الطرفين على $\Delta س \Delta ص$، وأخذ النهاية عندما $\Delta ص \longrightarrow ٠$،

Δس ← ٠ نحصل على دالة الكثافة المشتركة هـي ر(س، ص) المعرفة بالعلاقة (٦).

بوضع ي = ١، ر = ن في العلاقة (٦) لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصائين المرتبين $ص_١^* = س_{(١)}^*$ ؛ $ص_ن^* = س_{(ن)}^*$:

$$هـ_{١ن}(س،ص) = (ن-١)ن ق(س) ق(ص) [ق(ص) - ق(س)]^{ن-٢} \; ؛ \; س < ص \quad ..(٧)$$

مثال (٣):

بفرض $س^* = (س_١^*، ...، س_ن^*)$ عينة من التوزيع المنتظم ح(٠، ١)، أوجد التوزيع المشترك للإحصائين $ص_١^* = س_{(١)}^*$، $ص_ن^* = س_{(ن)}^*$

حيث أن: ق(س) = ١ ؛ $٠ \leq س \leq ١$

ق*(س) = س ؛ $٠ < س \leq ١$ وبالتعويض في العلاقة (٦)

$$هـ_{ير}(س،ص) = \frac{ن!}{(ي-١)!(ر-ي-١)!(ن-ر)!} س^{ي-١} (ص-س)^{ر-ي-١} (١-ص)^{ن-ر} \; ؛ \; ٠ < س < ص \leq ١$$

وبإعطاء ي = ١، ر = ن نحصل على كثافة التوزيع الاحتمالي لـ$(ص_١^*، ص_ن^*)$

$$هـ_{١ن}(س، ص) = ن(ن-١) (ص-س)^{ن-٢} \; ؛ \; ٠ < س < ص \leq ١$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالتطبيق في العلاقة (٧).

مثال (٤):

بفرض $س^* = (س_١^*، ...، س_ن^*)$ عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه:



$$ق^{\circ}(س)=\frac{1}{2}\int_{0}^{س} هـ^{\frac{-س}{2}} \quad ؛ س>0$$

أوجد التوزيع المشترك الإحصائين $ص_1^{\circ}=س_{(1)}^{\circ}$، $ص_ن^{\circ}=س_{(ن)}^{\circ}$

بما أن:

$$ق^{*}(س)=\frac{1}{2}\int_{0}^{س} هـ^{\frac{-س}{2}} دس=1-هـ^{\frac{-س}{2}} \quad ؛ س>0$$

فحسب العلاقة (7):

$$هـ_ن(س،ص)=\frac{ن(ن-1)}{4} هـ^{-(س+ص)/2}\left[\left(1-هـ^{-ص/2}\right)-\left(1-هـ^{-س/2}\right)\right]^{ن-2} \quad ؛ 0<س<ص$$

مبرهنة: إذا كانت $س^{\circ}=(س_1^{\circ}،...،س_ن^{\circ})$ عينة عشوائية من مجمع كثافـة توزيعه ق(س) ودالة توزيعه ق*(س)، وكانت $ص^{\circ}=(ص_1^{\circ}،...،ص_ن^{\circ})$ الإحصاءات المرتبة للعينة س*، فإن دالة الكثافة المشتركة لها هي:

$$هـ(ص_1،...،ص_ن)=ن!\prod_{ي=1}^{ن}ق(ص_ي) \quad ؛ \quad ص_1<ص_2<...<ص_ن$$

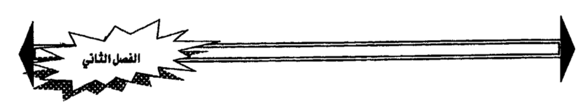
الإثبات:

نعلم أن:

$$هـ(ص_1،ص_2،...،ص_ن)=\lim_{\Delta ص_ي\to 0}\frac{1}{\prod_{ي=1}^{ن}\Delta ص_ي}ح(ص_1\le ص_1^{\circ}<ص_1+\Delta ص_1،...،ص_ن\le ص_ن^{\circ}<ص_ن+\Delta ص_ن)$$

وتحقق الحادث $(ص_1\le ص_1^{\circ}<ص_1+\Delta ص_1،...،ص_ن\le ص_ن^{\circ}<ص_ن+\Delta ص_ن)$ يعني تحقيق الحوادث $(ص_ي\le ص_ي^{\circ}<ص_ي+\Delta ص_ي)$؛ ي= 1، ... ، ن المتنافية مثنى مثنى في آن واحد، حيث توجد ملاحظة واحدة من العينة س* في كل فترة





$(\text{ص}_{\text{ي}} \leq \text{ص}^{*}_{\text{ي}} < \text{ص}_{\text{ي}} + \Delta \text{ص}_{\text{ي}})$ باحتمال $\text{ق}(\text{ص}_{\text{ي}} + \Delta\text{ص}_{\text{ي}}) - \text{ق}(\text{ص}_{\text{ي}})$ وحسب قانون التوزيع المتعدد الحدود:

$$\text{ح}=(\text{ص}_1 \leq \text{ص}^{*}_1 < \text{ص}_1+\Delta\text{ص}_1 ، \ldots ، \text{ص}_{\text{ن}} \leq \text{ص}^{*}_{\text{ن}} < \text{ص}_{\text{ن}}+\Delta\text{ص}_{\text{ن}}) \text{ن}! \prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \left[\text{ق}^{*}(\text{ص}_{\text{ي}}+\Delta\text{ص}_{\text{ي}}) - \text{ق}^{*}(\text{ص}_{\text{ي}})\right]$$

وبتقسيم الطرفين على $\prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \Delta\text{ص}_{\text{ي}}$ وجعل $\Delta\text{ص}_{\text{ي}} \rightarrow ٠$ نجد:

$$\text{هـ}(\text{ص}_1 ،\ldots، \text{ص}_{\text{ن}}) = \text{ن} \prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{نها}_{\Delta\text{ص}_{\text{ي}} \rightarrow ٠} \frac{\text{ق}(\text{ص}_{\text{ي}}+\Delta\text{ص}_{\text{ي}}) - \text{ق}(\text{ص}_{\text{ي}})}{\Delta\text{ص}_{\text{ي}}} = \text{ن} \prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} ! \text{ق}(\text{ص}_{\text{ي}}) ؛$$

$$\text{ص}_1 < \text{ص}_2 < \ldots < \text{ص}_{\text{ن}}$$

وهو المطلوب.

فمثلاً، إذا كانت لدينا معطيات المثال (٤)، نجد:

$$\text{هـ}(\text{ص}_1 ،\ldots، \text{ص}_{\text{ن}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}} \text{ن}! \, \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ي}}} ؛ \text{ص}_1 < \text{ص}_2 < \ldots < \text{ص}_{\text{ن}}$$

وإذا كانت لدينا معطيات المثال (٣)، فإن:

$$\text{هـ}(\text{ص}_1 ،\ldots، \text{ص}_{\text{ن}}) = \text{ن}! ؛ ٠ < \text{ص}_1 < \text{ص}_2 < \ldots < \text{ص}_{\text{ن}} \leq ١$$

ملاحظة:

يوجد فرق بين توزيع العينة العشوائية $\text{س}^{*} = (\text{س}^{*}_1 ،\ldots، \text{س}^{*}_{\text{ن}})$ وتوزيع العينة العشوائية المرتبة $\text{ص}^{*}_{\text{ي}} = \text{س}^{*}_{(\text{ي})}$، $\text{ص}^{*} = (\text{ص}^{*}_1 ،\ldots، \text{ص}^{*}_{\text{ن}})$؛ ي=١، ... ، ن.
فمثلاً، في حالة المعاينة من توزيع ح (٠، ١)، فإن:

$$\text{ق}(\text{س}_1 ،\ldots، \text{س}_{\text{ن}}) = \prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ي}}) = ١ ؛ ٠ \leq \text{س}_{\text{ي}} \leq ١ \quad ؛ \text{ي} = ١، \ldots، \text{ن}$$



بينما:

$$هـ(ص_1،...،ص_ن)=ن!\ ؛\ ٠<ص_1<ص_2<...<ص_ن\le ١$$

وفي حالة المعاينة من توزيع $\Gamma(١،\ ٢)$ فإن:

$$ق(س_1،...،س_ن)=\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} هـ^{-\frac{١}{٢}\sum_{١}^{ن} س_ي}$$

$$بينما:\ هـ(ص_1،...،ص_ن)=\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن} ن!\ هـ^{-\frac{١}{٢}\sum_{١}^{ن} ص_ي}$$

* *توزيع دوال في الإحصاءات المرتبة*

Distribution of functions of order statistics

استخلصنا في الفقرتين السابقتين التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاء المرتبة ذاتها. وسنبحث في هذه الفقرة توزيع دوال معينة في الإحصاءات المرتبة. إحدى أبسط الدوال في الإحصاءات المرتبة هو المتوسط الحسابي لها:

$$\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} ص_ي \qquad ؛\ ص_ي = س_{(ي)}$$

وبما أن:

$$\frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} ص_ي = \frac{١}{ن}\sum_{ي=١}^{ن} س_ي = \overline{س}$$

فتوزيع المعاينة لمتوسط الإحصاءات المرتبة هو نفسه توزيع المعاينة لمتوسط العينة س*.

سنناقش في الفقرات التالية توزيع وسيط العينة، مدى العينة ونصف مدى

العينة، لذا لا بد في البداية من تعريف وسيط، مدى ونصف مدى العينة. نفترض $ص_{١}^{*} ،...، ص_{ن}^{*}$ الإحصاءات المرتبة لعينة عشوائية $س_{١}^{*} ،...، س_{ن}^{*}$ من توزيع مستمر ق*(س).

تعريف: وسيط العينة Sample Median

يعرف وسيط العينة س* على أنه الإحصاء المرتب الأوسط إذا كانت ن فردية ومتوسط الإحصائين المرتبين الأوسطين إذا كانت ن زوجية، وإذا رمزنا بـ $\tilde{س}$ لوسيط العينة العشوائية س، فإن:

$$\tilde{س} = \begin{cases} ص_{م+١} & ؛ \quad ن = ٢م + ١ \\ \frac{ص_{م} + ص_{م+١}}{٢} & ؛ \quad ن = ٢م \end{cases}$$

حيث إن م عدد صحيح موجب.

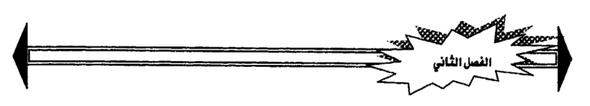
ونعلم من نظرية الاحتمالات أن وسيط المجتمع ق(س)، ولنرمز له بـ $\tilde{M}$، هو تلك القيمة التي تحقق الشرط:

$$ق(\tilde{M}) = \frac{١}{٢}$$

تعريف: مدى العينة Sample Range

مدى العينة س* =($س_{١}^{*} ،...، س_{ن}^{*}$) نرمز له بـ ح ويعرف على النحو الآتي:

$$ح = ص_{ن}^{*} = ص_{(١)}^{*} = س_{ن}^{*} = س_{(١)}^{*} \quad .... \quad (٢)$$



تعريف: نصف مدى العينة Sample Midrange

نصف مدى العينة س* =(س١*، ...، سن*) نرمز له بـ ت ويعرف على النحو التالي:

$$ت = \frac{ص_ن^* + ص_١^*}{٢} = \frac{ح}{٢} + ص_١^* \quad \dots\dots\dots\dots (٣)$$

**** توزيع وسيط العينة Distribution of sample Median***

بما أن وسيط العينة $\tilde{س}$ عبارة عن إحصاء، أي متغير عشوائي فله توزيع إجمالي يدعى بتوزيع المعاينة لـ $\tilde{س}$. ولإيجاد هذا التوزيع نميز حالتين: ن فردية، ن زوجية.

إذا كان حجم العينة س* فردياً، فإن $\tilde{س} = ص_{م+١}$، ومن ثم توزيع $\tilde{س}$ هو عبارة عن توزيع الإحصاء المرتب $ص_{م+١}$، وهذا الأخير نحصل عليه بوضع ي= م+١، ن = ٢م+١ في العلاقة (٣).

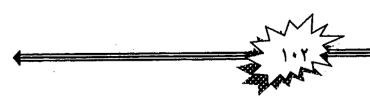
$$هـ(\tilde{س}) = \frac{(٢م+١)}{م\ م} ق(\tilde{س}) \left[\tilde{ق}^*(\tilde{س})\right]^م \left[١ - ق(\tilde{س})\right]^م$$

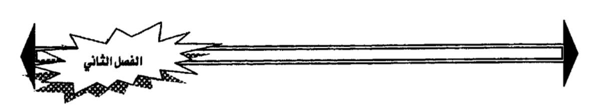
أما إذا كان حجم العينة س* زوجياً (ن=٢م)، فإن $\tilde{س} = \frac{ص_م + ص_{م+١}}{٢}$

وعندئذ نشتق توزيع $\tilde{س}$ على النحو الآتي:

نعين توزيع $(ص_م، ص_{م+١})$، وذلك بوضع ر = م+١، ي = م في العلاقة (٦).

$$هـ(س، ص) = \frac{٢م!}{(م-١)!(م-١)!} ق(س) ق(ص) \left[ق^*(س)\right]^{م-١} \left[١ - ق^*(ص)\right]^{م-١}$$





وبإجراء التحويل من $\text{ص}_{م}^{*} = \text{ص}_{م+1}^{*}$ إلى $(\bar{\text{س}} ، \text{ع})$

حيث إن $\text{ع} = \text{ص}_{م+1}$، وبملاحظة أن المحدد الجاكوبي $\text{ج} = 2$ نجد:

$$\text{ك}(\bar{\text{س}} ، \text{ع}) = \frac{(2\text{م})!}{(\text{م}-1)!\,(\text{م}-1)!}\,\text{ق}(\text{ع})\,\text{ق}(2\bar{\text{س}}-\text{ع})\left[\text{ق}^{*}(2\bar{\text{س}}-\text{ع})\right]^{\text{م}-1}\left[1-\text{ق}^{*}(\text{ع})\right]^{\text{م}-1} \;؛\; \bar{\text{س}} \geq \text{ع} \quad ....(5)$$

ومن ثم دالة الكثافة الاحتمالية لوسيط العينة هي:

$$\text{ك}(\bar{\text{س}}) = \int_{\bar{\text{س}}}^{\infty} \text{ك}(\bar{\text{س}} ، \text{ع})\,.\text{دع} \quad ....(6)$$

مثال (١):

بفرض $\text{س}^{*} = (\text{س}_{1}^{*} ، ... ، \text{س}_{ن}^{*})$ عينة عشوائية من توزيع

$\text{ق}(\text{س}) = 2\text{هـ}^{-2\text{س}}$ ؛ $\text{س} > 0$

أوجد توزيع $\bar{\text{س}}$، إذا علمت أن حجم العينة فردي (ن=٢م+١).

بما أن:

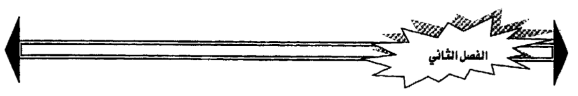
$\text{ق}(\text{س}) = 2\text{هـ}^{-2\text{س}}$ ؛ $\text{س} > 0$ فإن $\text{ق}^{*}(\text{س}) = 1 - \text{هـ}^{-2\text{س}}$ ؛ $\text{س} > 0$

وبما أن ن=٢م+١ فردي، عندئذٍ توزيع $\bar{\text{س}}$ نحصل عليه باستخدام العلاقة........ (٤)

$$\text{هـ}(\bar{\text{س}}) = \frac{(2\text{م}+1)!}{\text{م}!\,\text{م}!}\,2\text{هـ}^{-2\bar{\text{س}}}\left(1-\text{هـ}^{-2\bar{\text{س}}}\right)^{\text{م}}\left(\text{هـ}^{-2\bar{\text{س}}}\right)^{\text{م}}$$

$$= \frac{2(2\text{م}+1)!}{\text{م}!\,\text{م}!}\,\text{هـ}^{-2(\text{م}+1)\bar{\text{س}}}\left(1-\text{هـ}^{-2\bar{\text{س}}}\right)^{\text{م}} \quad ؛ \quad \bar{\text{س}} > 0$$





فمثلاً، إذا كانت ن=١١، أي م=٥

$$هـ(\tilde{س}) = \frac{٢ \times ١١!}{٥!٥!} هـ^{-١٢\tilde{س}} \left(١ - هـ^{-٢\tilde{س}}\right)^{٥}$$

مثال (٢):

بفرض $ص_{١}^{*}$، $ص_{٢}^{*}$، $ص_{٣}^{*}$ الإحصاءات المرتبة لعينة عشوائية $س^{*} = (س_{١}^{*}، س_{٢}^{*}، س_{٣}^{*})$ من التوزيع المنتظم م(٠، ١)، أوجد توزيع الوسيط $\tilde{س}$ واحسب متوسطه وتباينه.

بما أن:

$$ق(س) = ١ \quad ؛ \quad ٠ \leq س \leq ١$$

$$ق^{*}(س) = س \quad ؛ \quad ٠ < س \leq ١$$

فبتطبيق العلاقة (٤)، نجد:

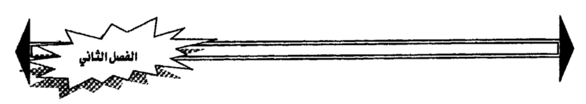
$$ك(\tilde{س}) = \frac{٣!}{١!١!} \tilde{س}(١-\tilde{س}) = ٦\tilde{س}(١-\tilde{س}) \quad ؛ \quad ٠ < \tilde{س} \leq ١$$

$$و\tilde{س} = ٦ \int_{٠}^{١} \tilde{س}^{٢}(١-\tilde{س})د\tilde{س} = ٦\left(\frac{\tilde{س}^{٣}}{٣} - \frac{\tilde{س}^{٤}}{٤}\right)\Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$$

$$و\tilde{س}^{٢} = ٦ \int_{٠}^{١} \tilde{س}^{٣}(١-\tilde{س})د\tilde{س} = \frac{٣}{١٠}$$

$$تباين\ \tilde{س} = و\tilde{س}^{٢} - (و\tilde{س})^{٢} = \frac{٣}{١٠} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢٠}$$





* توزيع مدى ونصف مدى العينة

Distribution of Sample Range and Midrange

لاشتقاق توزيع كل من مدى العينة ح= $ص_ن - ص_١$ ونصف مدى العينة $ت = \frac{ص_١ + ص_ن}{٢}$، نبحث أولاً عن توزيع ($ص_١$، $ص_ن$) وهو:

$$هـ_{ي_ن}(س، ص) = ن(ن-١) ق(س) ق(ص) \left[ق^{*}(ص) - ق^{*}(س)\right]^{ن-٢} \quad ؛ \quad س < ص$$

وبالتحويل من ($ص_١$، $ص_ن$) إلى (ح، ت)، حيث أن:

$$\left.\begin{array}{l} ص_ن - ص_١ = ح \\ \frac{ص_١ + ص_ن}{٢} = ت \end{array}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} س = \frac{٢ت - ر}{٢} \\ ص = \frac{٢ت + ر}{٢} \end{array}\right.$$

ومن ثم جاكوبي التحويل:

$$ج = \begin{vmatrix} \frac{دس}{در} & \frac{دس}{دت} \\ \frac{دص}{در} & \frac{دص}{دت} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{١}{٢} & ١ \\ \frac{١}{٢} & ١ \end{vmatrix} = -١$$

وبالتالي، فإن دالة الكثافة لـ (ح، ت)

$$ك(ر، ت) = ن(ن-١) ق(ت - \frac{ر}{٢}) ق(ت + \frac{ر}{٢}) \left[ق^{*}(ت + \frac{ر}{٢}) - ق^{*}(ت - \frac{ر}{٢})\right]^{ن-٢} \quad ؛ \quad ر > ٠ \quad ...(٧)$$

وبناءً على ذلك فدالة الكثافة الاحتمالية للمدى ح:

$$ك(ر) = \int_{-\infty}^{+\infty} ك(ر، ت)\, دت \quad .... (٨)$$



ودالة الكثافة الاحتمالية لنصف المدى:

$$ك(ت) = \int_{٠}^{\infty} ك(ر، ت)\, در \quad \text{.. (٩)}$$

مثال (٣):

بفرض $س^{\circ} = (س_{١}^{\circ}، ...، س_{ن}^{\circ})$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم ح(٠، ١)، أوجد:

١. التوزيع المشترك للمدى ح ونصف المدى ت.

٢. التوزيع الهامشي للمدى ح.

٣. التوزيع الهامشي لنصف المدى ت.

بما أن:

$$ق(س) = ١ \quad ؛ \quad ٠ \le س \le ١$$

$$ق^{*}(س) = س \quad ؛ \quad ٠ \le س \le ١$$

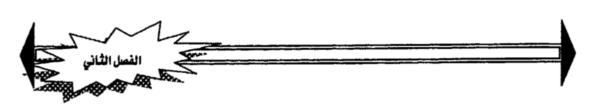
فإن دالة الكثافة المشتركة لـ ح وتـ هي:

$$ك(ر، ت) = ن(ن-١)\, ر^{ن-٢} \quad ؛ \quad ٠ < ت - \frac{ر}{٢} < ١$$

$$٠ < ت + \frac{ر}{٢} < ١ \quad \text{........................ (١٠)}$$

ومن ثم دالة الكثافة الهامشية لـ ح:

$$ك(ر) = \int_{\frac{ر}{٢}}^{١-\frac{ر}{٢}} ن(ن-١) ر^{ن-٢}\, دت = ن(م-١)(١-ر) ر^{ن-٢} \quad ؛ \quad ٠ < ر < ١ \quad \text{..........(١١)}$$



ودالة الكثافة الهامشية لـ ت:

$$\text{ك}(\text{ت})=\text{ن}(\text{ن}-١)\int_{٠}^{\text{أقل}[٢\text{ت}،٢(١-\text{ت})]}\text{ر}^{\text{ن}-٢}\,\text{در}=\begin{cases}\text{ن}(٢\text{ت})^{\text{ن}-١} & ؛\ -١<\text{ت}<٠\\ \text{ن}[٢(١-\text{ت})]^{\text{ن}-١} & ؛\ ٠<\text{ت}<١\end{cases}\quad ......(١٢)$$

والقيمة المتوقعة لـ ح: $\text{و ح}=\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}+١}$

* توزيع المعاينة لـ $\text{ق}^{*}(\text{س})$ *Sample distribution of*

نلاحظ من تعريف دالة التوزيع التجريبي $\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})$ أنها عبارة عن إحصاء، عند كل قيمة حقيقية س، لكونها دالة في بيانات العينة، أي متغيراً عشوائياً، وبالتالي لها توزيع احتمالي تحدده المبرهنة الآتية:

مبرهنة: لتكن $\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})$ دالة التوزيع التجريبي لمتغير عشوائي ع الموافقة لعينة عشوائية س= (س$_١$، ... ، س$_\text{ن}$) من توزيع ل(ع)، ولنفترض ق(س) دالة التوزيع النظري لـ ع. عندئذ توزيع $\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})$ يعطي بالعلاقة الآتية:

$$\text{ح}\left(\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})=\frac{\text{ك}}{\text{ن}}\right)=\text{جـ}^{\text{ك}}_{\text{ن}}[\text{ق}(\text{س})]^{\text{ك}}[١-\text{ق}(\text{س})]^{\text{ن}-\text{ك}}\quad ؛\quad \text{ك}=٠،١،\dots،\text{ن}\ ....(١)$$

الإثبات: نلاحظ بوضوح أن المتغير العشوائي $\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})$ يفترض القيم:

$$٠،\frac{١}{\text{ن}}،\frac{٢}{\text{ن}}،...،\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}}،\frac{\text{ن}}{\text{ن}}=١$$

وإذا رمزنا بـ : $\text{ع}_\text{ي}=\begin{cases}١ & ؛\ \text{س}_\text{ي}<\text{س}\\ ٠ & ؛\ \text{س}_\text{ي}\geq\text{س}\end{cases}$

فإن $\text{ع}_\text{ي}$ متغير عشوائي يتبع توزيع بيرنولي ب(١، ق(س))، ومن ثم $\text{ع}=\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}}\text{ع}_\text{ي}$ يتبع توزيع ذي الحدين ب(ن، ق(س))، حيث أ، ع يمثل عدد القيم

$س_ي$ الأقل من س. ولكن حسب التعريف:

$ق_ن^*(س) = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{ن} ع_ي$ وعلى ذلك يكون له نفس توزيع المعاينة لمتوسط عينة عشوائية مأخوذة من توزيع بيرنولي، أي أن:

$$ح\left(ق_ن^*(س) = \frac{ك}{ن}\right) = جـ_ن^ك\ ق^ك(س)\ [١ - ق(س)]^{ن-ك} \quad ؛ ك = ٠، ١، \ldots، ن$$

وهو المطلوب.

بما أن: $ق_ن^*(س) = \frac{ع}{ن}$

فإن:

$$و[ق_ن^*(س)] = و\left(\frac{ع}{ن}\right) = \frac{١}{ن} و ع = \frac{١}{ن} ن ق(س) = ق(س) \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$تباين\ [ق_ن^*(س)] = ت\left(\frac{ع}{ن}\right) = \frac{١}{ن} ق(س)\ [١ - ق(س)].$$

* المشمولات أو المغطيات *Coverage's*

لنفرض أن $س^* = (س_١^*، \ldots، س_ن^*)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر ل(ع) دالة كثافته ق(س) ودالة توزيعه ق*(س)، ولتكن $ص^* = (ص_١^*، \ldots، ص_ن^*)$ العينة المرتبة الموافقة لـ س.

توجد خاصتان مهمتان للإحصاءات المرتبة، مفيدتان جداً عند دراسة بعض طرق الاستدلال الإحصائي، وهما:

١. المساحة المحددة بدالة الكثافة ق(س) وأي إحصائين مرتبين مستقلة عن دالة الكثافة هذه.

٢. الإحصاءات المرتبة $ص_{1}^{*}$ ،...،$ص_{ن}^{*}$ تقسم (في المتوسط) المساحة تحت منحنى التوزيع ق(س) إلى (ن+١) جزء متساوٍ، ومساحة كل جزء تساوي ١/ (ن+١).

إثبات الخاصة (١):

إذا رمزنا بـ $ل_{ي}$= ق($ص_{ي}$) ؛ ي = ١، ... ، ن فإن $ل_{ي}$ متغير عشوائي يخضع للتوزيع المنتظم ح(٠، ١)، ومن ثم الفرق:

$$ع_{ي ر} = ل_{ر} - ل_{ي} = ق(ص_{ر}) - ق(ص_{ي}) = ح(ص_{ي} < ع < ص_{ر})$$

عبارة عن المساحة المحددة بمنحنى التوزيع ق(س) والإحصائين المرتبين $ص_{ي}$، $ص_{ر}$؛ ي<ر ويصبح المطلوب إثبات أن التوزيع الاحتمالي للفرق $ع_{ي ر}$ لا يعتمد على التوزيع ل(ع).

بناءً على نتائج المثال (٣)، فإن كثافة الاحتمال ($ل_{ي}$، $ل_{ر}$) هي:

$$هـ(ل_{ي}، ل_{ر}) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ر-ي-1)!(ن-ر)!} ل_{ي}^{ي-1}(ل_{ر}-ل_{ي})^{ر-ي-1}(1-ل_{ر})^{ن-ر}؛ 0 < ل_{ي} < ل_{ر} < 1$$

وبالتحويل من المتغير ($ل_{ي}$، $ل_{ر}$) إلى المتغير ($ل_{ي}$، $ع_{ي ر}$)، وبملاحظة أن المحدد الجاكوبي ج=١

نجد:

$$ك(ل، ع) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ر-ي-1)!(ن-ر)!} ل_{ي}^{ي-1} ع^{ر-ي-1} (1-ع-ل)^{ن-ر}؛ 0 < ل < 1؛ 0 < ع + ل < 1$$

وبإجراء تكامل الدالة ك(ل، ع) بالنسبة لـ ل نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لـ $ع_{ي ر}$:

$$ك(ع) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ر-ي-1)!(ن-ر)!} ع^{ر-ي-1} \int_0^{1-ع} ل^{ي-1}(1-ع-ل)^{ن-ر} دل$$

ولحساب هذا التكامل نضع $ص = \frac{ل}{1-ع}$

$$ك(ع) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ر-ي-1)!(ن-ر)!} ع^{ر-ي-1}(1-ع)^{ن-ر+ي} \int_0^1 ص^{ي-1}(1-ص)^{ن-ر} دص \quad ..(1)$$

وبناءً على العلاقة (٣٦) والخاصة (٢) لدالة جاما، نجد:

$$\int_0^1 ص^{ي-1}(1-ص)^{ن-ر} دص = \frac{\Gamma(ي)\Gamma(ن-ر+1)}{\Gamma(ن-ر+ي+1)} = \frac{(ي-1)!(ن-ر)!}{(ن-ر+ي)!}$$

وبالتعويض في (١) نحصل على دالة كثافة توزيع $ع_{ي ر} = ع$

$$ك(ع) = \frac{ن!}{(ي-1)!(ر-ي-1)!(ن-ر)!} \frac{(ي-1)!(ن-ر)!}{(ن-ي+1)!} ع^{ر-ي-1} \int_0^1 ص^{ي-1}(1-ع)^{ن-ر+ي} \quad ...(2)$$

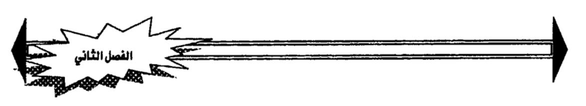
$$= \frac{ن!}{(ر-ي-1)!(ن-ر+ي)!} ع^{ر-ي-1}(1-ع)^{ن-ر+ي}; \quad 0<ع<1 \quad ....(2)$$

وهذه دالة كثافة توزيع ب(ر-ي)، ن-ر+ي+١)، وهو لا يعتمد على توزيع المجتمع ق(س).

إثبات الخاصة (٢)

$$و ع = \int_0^1 ع ك(ع) دع = \frac{ن!}{(ر-ي-1)!(ن-ر+ي)!} \int_0^1 ع^{ي-1}(1-ع)^{ن-ر+ي} دع$$

$$= \frac{ن!}{(ر-ي-1)!(ن-ر+ي)!} \frac{\Gamma(ر-ي+1)\Gamma(ن-ر+ي+1)}{\Gamma(ن+2)}$$



$$= \frac{ن!}{(ر-ي-1)!(ن-ر+ي)!} \frac{(ر-ي)!(ن-ر+ي+1)!}{(ن+1)ن!} = \frac{ر-ي}{ن+1}$$

وبوضع ر=ي+1 نجد $و ع = \frac{1}{ن+1}$، وهو المطلوب.

تعريف: المشمولات أو المغطيات Coverage's

تدعى الفترات $(-\infty ، س_{(1)}]$، $(س_{(1)} ، س_{(2)}]$، ... ، $(س_{(ن)} ، +\infty]$ بخلايا العينة س*، ونرمز لها بـ $ب_1$، $ب_2$، ... ، $ب_{ن+1}$ على الترتيب، كما تدعى الدوال (الإحصاءات):

$$ج_1 = ق(ص_1) - ق(-\infty) = ل_1$$

$$ج_2 = ق(ص_2) - ق(ص_1) = ل_2 - ل_1$$

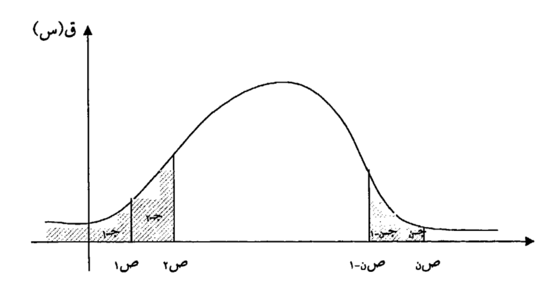
....

$$ج_ن = ق(ص_ن) - ق(ص_{ن-1}) = ل_ن - ل_{ن-1}$$

$$ج_{ن+1} = ق(+\infty) - ق(ص_ن) = 1 - ل_ن \text{ ؛ } ص_ي = س_{(ي)} \text{؛ } ي=1، ... ، ن$$

في هذه الخلايا بالمشمولات أو المغطيات، حيث إن مجموعها $\sum_{ي=1}^{ن+1} ج_ي = 1$

وهذا يعني أن $ج_ي$ غطاء الخلية $ب_ي$ حيث ي=1، ...، ن+1 ، ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (1).



بما أن الغطاء جـر؛ ر=١، ... ، ن متغير عشوائي، فله إذن توزيع احتمالي، وهذا التوزيع يمكن إيجاده بسهولة بوضع ر = ر، ي = ر−١ في العلاقة (٢):

$$\text{ك}_{\text{جـ}_\text{ي}}(\text{ع}) = \text{ن}(١-\text{ع})^{\text{ن}-١} \quad ; \quad ٠<\text{ع}<١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

وبناءً على ذلك:

$$\text{و}(\text{جـ}_\text{ي}) = \text{ن}\int_{٠}^{١} \text{ع}(١-\text{ع})^{\text{ن}-١}\,\text{دع} = \text{ن}\frac{\Gamma(٢)\,\Gamma(\text{ن})}{\Gamma(\text{ن}+٢)} = \frac{١}{\text{ن}+١}$$

$$\text{و}(\text{جـ}_\text{ي}) = \text{ن}\int_{٠}^{١} \text{ع}(١-\text{ع})^{\text{ن}-١}\,\text{دع} = \text{ن}\frac{\Gamma(٣)\,\Gamma(\text{ن})}{\Gamma(\text{ن}+٣)} = \frac{٢}{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)}$$

$$\text{ت}(\text{جـ}_\text{ي}) = \text{و}(\text{جـ}_\text{ي}^{٢}) - [\text{و}(\text{جـ}_\text{ي})]^{٢} = \frac{\text{ن}}{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)^{٢}}$$

**** المعاينة في حالة عينات كبيرة Sampling For large Samples***

بحثنا في البنود السابقة من هذا الفصل أساسيات نظرية المعاينة في حالة

عينات بحجم محدود ن ولنتأمل الآن النتائج التي يمكن الحصول عليها من نظرية المعاينة عندما نجعل ن ← ∞، في هذه الحالة لدينا مجتمع دالة توزيعه ق(س) وندرس متتالية من المتغيرات العشوائية س١، س٢،... المستقلة مثنى مثنى، وأي فئة من ن من تلك المتغيرات تعتبر عينة عشوائية بحجم ن مأخوذة من المجتمع ق*(س).

وسنعتمد في هذا البند على مبرهنات النهاية ونتائجها المفيدة لدراسة السلوك التقاربي لميزات العينة وإيجاد التوزيعات التقريبية لدوال مختلفة في العينة، في حالة عينة كبيرة الحجم.

*** *تقارب عزوم العينة بالاحتمال***

Convergence of Sample Moments in Probability

أحد أبسط النتائج المتعلقة بعزوم العينة من أجل عينات كبيرة معطاة بالمبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت س* =(س١*،...،سن*) عينة عشوائية من توزيع ل(ع)، وكان العزم من المرتبة ر لـ ع موجوداً، فإن العزم من المرتبة ر للعينة س* يتقارب بالاحتمال من العزم من المرتبة ر لـ ع عندما ن ← ∞.

الإثبات: لنرمز للعزم الابتدائي من المرتبة ر المعرف بالعلاقة (١) بـ أن ر للإشارة إلى علاقة عزم العينة بحجمها ن.

كما نعلم:

و أن ر = αر

ت $\text{أ}_{\text{ن ر}} = \frac{\alpha_{2\text{ر}} - \alpha_{\text{ر}}^{2}}{\text{ن}}$ وحسب متباينة تشيبيشف:

$$\text{ح}\left(\left|\text{أ}_{\text{ن ر}} - \alpha_{\text{ر}}\right| \leq \text{ع}\right) \geq 1 - \frac{\alpha_{2\text{ر}} - \alpha_{\text{ر}}^{2}}{\text{ن ع}^{2}}.$$

وبأخذ نهاية الطرفين، عندما ن ⟵ ∞، نجد: $\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{ح}\left(\left|\text{أ}_{\text{ن ر}} - \alpha_{\text{ر}}\right| \leq \text{ع}\right) = 1$

لأن الاحتمال لا يتجاوز الواحد والعزم الابتدائي من المرتبة ر لـ ع موجود (حسب الفرض)، وهو المطلوب.

وبشكل مشابه، يمكن الإثبات من أجل العزم المركز $\text{م}_{\text{ن ر}}$ للعينة س* على أنه يتقارب بالاحتمال من العزم المركزي $M_{\text{ر}}$ لـ ع عندما ن ⟵ ∞.

تعني المبرهنة أن عزوم العينة تعتبر قيماً تقريبية جيدة للعزوم النظرية الموافقة لها (إذا كانت هذه الأخيرة موجودة) في حالة عينات كبيرة الحجم.

وكحالة خاصة، عندما ر = ١ فإن $\text{أ}_{\text{ن}1} = \overline{\text{س}}$ و $\alpha_{1} = M$، أي أن متوسط العينة متقارب بالاحتمال من متوسط المجتمع M.

وكذلك، عندما ر = ٢ فإن $\text{م}_{\text{ن}2} = \text{ل}^{2}$ و $M_{2} = \sigma^{2}$، أي أن تباين العينة متقارب بالاحتمال من تباين المجتمع σ^{2}.

بصورة عامة، تبقى المبرهنة صحيحة من أجل أي دالة مستمر لعدد منته من الكميات $\text{أ}_{\text{ن ر}}$ (فمثلاً، $\text{م}_{\text{ن ر}}$ دالة مستمرة في $\text{أ}_{\text{ن}1}$، ... ، $\text{أ}_{\text{ن ر}}$ على شكل كثير حدود من الدرجة ر).

وهذه تعتبر نتيجة للمبرهنة العامة الآتية حول التقارب بالاحتمال لدالة مستمرة في متغيرات عشوائية.

مبرهنة: لتكن المتغيرات العشوائية $\eta_1(ن)، \eta_2(ن)، ...، \eta_ر(ن)$ متقاربة بالاحتمال، عندما ن ← ∞ إلى الثوابت جـ١، جـ٢، ... ، جـر على الترتيب، عندها من أجل أي دالة مستمرة φ(س١، س٢، ... ، سر) فالمتغير العشوائي:

$$\eta(ن)=\varphi\left(\eta_1(ن)، \eta_2(ن)، ...، \eta_ر(ن)\right) \xrightarrow{ح} \varphi(جـ_1، جـ_2، ...، جـ_ر)$$

الإثبات:

بما أن φ دالة مستمرة، فإنه مهما يكن العدد الحقيقي ع>٠ يمكن إيجاد عدد حقيقي δ=δ(ع) بحيث أن:

$$\left|\varphi(س_1، س_2، ...، س_ر)-\varphi(جـ_1، جـ_2، ...، جـ_ر)\right|<ع$$

من أجل $|س_ي-جـ_ي|<\delta$ ؛ ي= ١، ٢، ...، ر

إذا رمزنا بـ $\{|\eta_ي(ن) - جـ_ي|<\delta\}$ ؛ ي = ١، ٢، ... ، ر، فإن الحادث $ب=ب_1\cap ب_2\cap...\cap ب_ر$ محتوى الحادث $\{|\eta(ن)-\varphi(جـ_1، جـ_2، ...، جـ_ر)|<\delta\}$

ومن ثم:

$$ح(جـ)\geq ح(ب)=١-ح(\bar{ب})=١-ح\left(\bar{ب}_1\cup \bar{ب}_2\cup...\cup \bar{ح}_ر\right)=١-\sum_{ي=١}^{ر}ح(\bar{ب}_ي)$$

وبناءً على التقارب بالاحتمال، حسب الفرض، للمتغيرات العشوائية $\eta_ي(ن)$، فإنه من أجل أي عدد حقيقي δ وأي $\gamma>٠$ يمكن إيجاد عدد طبيعي $ن_ي = ن_ي(\gamma)$، بحيث إن:

$$ح(\bar{ب}_ي)=ح\left(|\eta_ي(ن)-جـ_ي|\geq\delta\right)<\frac{\gamma}{ر} \text{ ؛ } ن\geq ن_ي \quad، ي= ١، ...، ر$$

بأخذ $ن_0$ = أكبر $(ن_1، ن_2، ... ، ن_ر)$



نجد أن المتباينات: $\text{ح}(\overline{\text{ب}}_{\text{ي}}) < \frac{\gamma}{\text{ر}}$ ؛ ي = ١، ٢، ... ، ر

محققة في آن واحد عندما $\text{ن}_1 \leq \text{ن}_0$، وبالتالي:

$$\text{ح}\left(\left|\eta(\text{ن}) - \varphi(\text{جـ}_1، \text{جـ}_2، ...، \text{جـ}_\text{ر})\right| < \text{ع}\right) \geq 1 - \gamma \text{ ؛ ن} \geq \text{ن}_0$$

وهو المطلوب.

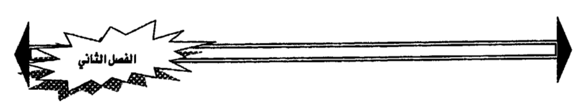
نشير أيضاً لاستخدام إحصائي آخر للمبرهنة الثانية، عند دراسة خواص منحنى توزيع متغير عشوائي مستمر، حيث نحتاج في الغالب لإيجاد معامل الالتواء γ_1 ومعامل التطاول γ_2، المعرفين كما يلي:

$$\gamma_1 = \frac{M_3}{M_2^{3/2}} \quad ، \quad \gamma_2 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 \quad \text{.....................} \quad (1)$$

وإذا كانت العينة العشوائية $\text{س}^\circ = (\text{س}_1^\circ، \text{س}_2^\circ، ...، \text{س}_\text{ن}^\circ)$ من توزيع مستمر ل(ع)، فإن معامل الالتواء والتطاول للعينة العشوائية $\Gamma_{\text{ن}1}$، $\Gamma_{\text{ن}2}$ يعرفان على النحو الآتي:

$$\Gamma_{\text{ن}1} = \frac{\text{م}_{\text{ن}3}}{\text{م}_\text{ن}^3} \quad ، \quad \Gamma_{\text{ن}2} = \frac{\text{م}_{\text{ن}4}}{\text{م}_\text{ن}^4} - 3$$

وبملاحظة أن $\Gamma_{\text{ن}\text{ي}}$ ؛ ي = ١، ٢ دالتين مستمرتين، عندما $M_2 > 0$، في عزوم العينة وبالتالي حسب المبرهنة الثانية فإن $\Gamma_{\text{ن}1}$! $\Gamma_{\text{ن}2}$ يتقاربان بالاحتمال إلى المميزين النظريين الموافقين لهما γ_1! γ_2 عندما ن $\longleftarrow \infty$.



* التوزيعات التقريبية للعزوم الابتدائية للعينة

Approximating Distribution of sample elementary Moments

نفترض أن العزوم المختلفة من المرتبة ر للمجتمع ل(ع) موجودة، وهذا ما نتخذه دائماً.

إذا كان توزيع المتغير العشوائي $\eta_{ن}$ يتقارب بالتوزيع (Convergence in distribution) من توزيع المتغير العشوائي η، عندما ن $\infty \longrightarrow$ فإننا نكتب ذلك:

$$\text{ل}(\eta_{ن}) \rightarrow \text{ل}(\eta) \quad \text{أو} \quad \text{ل}(\eta_{ن}) \xrightarrow{ن\rightarrow\infty} \text{ل}(\eta)$$

وفيما يلي، إذا كان المتغير العشوائي $\eta_{ن}$ ن $\infty \longrightarrow$ يتقارب من التوزيع الطبيعي بالمعلمتين $\sigma_{ن}^{2}$، $M_{ن}$ عندما. أي له التوزيع الحدي ن[1] $(M_{ن}, \sigma_{ن}^{2})$ فنعبر عن ذلك:

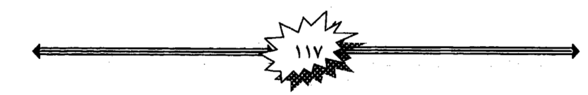
$$\text{ل}(\eta_{ن}) \xrightarrow{ن\rightarrow\infty} \text{ن}^{(1)}(M_{ن}, \sigma_{ن}^{2}) \quad \text{وهذا يعني:}$$

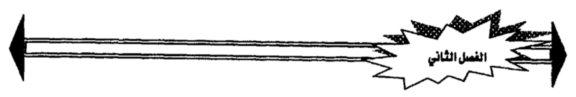
$$\text{ل}\left(\frac{\eta_{ن} - M_{ن}}{\sigma_{ن}}\right) \xrightarrow{ن\rightarrow\infty} \text{ن}^{(1)}(0,1)$$

يعطى التوزيع الحدي للعزم الابتدائي $أ_{نر}$ للعينة بالمبرهنة الآتية.

مبرهنة: إذا كان $أ_{نر}$ العزم الابتدائي من المرتبة ر لعينة عشوائية بحجم ن مجتمع ل(ع) عزمه الابتدائي $\alpha_{ر}$ موجود (منته)، فإن التوزيع الحدي لـ $أ_{نر}$ هو $\text{ن}^{(1)}\left(\alpha_{ر}, \frac{\alpha_{2ر} - \alpha_{ر}^{2}}{ن}\right)$، أي أن:

$$\text{ل}(أ_{نر}) \xrightarrow{ن\rightarrow\infty} \text{ن}^{(1)}\left(\alpha_{ر}, \frac{\alpha_{2ر} - \alpha_{ر}^{2}}{ن}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$





الإثبات: كما تعلم أ$_{نر}$ عبارة عن متوسط ن من المتغيرات العشوائية س$_{ي}^{ر}$؛ ي=١، ... ، ن المستقلة مثنى مثنى ولها نفس التوزيع، وهو توزيع ع^{ر}، إذن، حسب مبرهنة النهاية المركزية، فإن:

$$ل(أ_{نر}) \xrightarrow{ن \leftarrow \infty} ن^{(1)}\left(\alpha_{ر}، \frac{\alpha_{٢ر}-\alpha_{ر}^{٢}}{ن}\right) \text{ ومن ثم:}$$

$$ل\left(\frac{أ_{نر}-\alpha_{ر}}{\sqrt{(\alpha_{٢ر}-\alpha_{ر}^{٢})/ن}}\right) \xrightarrow{ن \leftarrow \infty} ن^{(1)}(١،٠) \quad .... (٤)$$

وهو المطلوب.

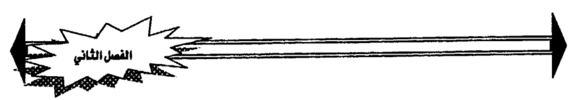
وهذا يعني أن أ$_{نر}$ يتوزع طبيعياً بالتقارب (distributed asymptotically normally) وفق ن$^{(1)}\left(\alpha_{ر}، \frac{\alpha_{٢ر}-\alpha_{ر}^{٢}}{ن}\right)$ من أجل ن كبيرة، ومن ثم ن أ$_{نر}$ = $\sum_{ي=١}^{ن}$ س$_{ي}^{ر}$ يتوزع طبيعياً بالتقارب وفق ن$^{(1)}$ (ن$\alpha_{ر}$، ن($\alpha_{٢ر}-\alpha_{ر}^{٢}$)) من أجل ن كبيرة.

مبرهنة: (مبرهنة كليفينكو (Klevenco Theorem)):

وبناءً على شروط المبرهنة السابقة، فإن:

$$ح\left(\underset{ن \leftarrow \infty}{نـها}\ \underset{-\infty<س<\infty}{أقصى\ قيمة}\left|ق_{ن}^{*}(س)-ق(س)\right|=٠\right)=١ \quad ....(٨)$$

وتنص على أنه باحتمال يساوي الواحد فإن ق$_{ن}^{*}$(س) تتقارب بانتظام س من ق(س)، وهذا يعني أن ق$_{ن}^{*}$(س)، كمقدر لـ ق(س)، يتقارب من ق(س) بانتظام لجميع قيم س وذلك باحتمال يساوي الواحد، وبعبارة أخرى يكون



الفرق $|ق^*_ن(س) - ق(س)|$ صغيراً بقدر ما نريد (من أجل كل قيمة لـ س) باحتمال يساوي الواحد، عندما يكون حجم العينة كبيراً.

وإذا رمزنا بـ:

$$د_ن = د_ن(س) = \underset{-\infty<س<\infty}{\text{أقصى قيمة}} |ق^*_ن(س) - ق(س)| \quad \text{.......... (٩)}$$

فإن $د_ن$ متغير عشوائي منقطع يقيس الانحراف الأعظم للدالة $ق^*_ن(س)$ عن الدالة ق(س) على كامل محور الأعداد الحقيقية، ومن ثم يمكن كتابة العلاقة (٨) على الصورة:

$$ح\left(\underset{ن\to\infty}{نها} د_ن = ٠\right) = ١ \quad \text{.......... (١٠)}$$

مبرهنة: مبرهنة كالماغوروف **Kalmagorov Theorem**

إذا كان المتغير العشوائي الملاحظ ع مستمراً، دالة توزيعه ق(س)، فمن أجل أي قيمة حقيقية معينة ع>٠ تتحقق العلاقة الآتية:

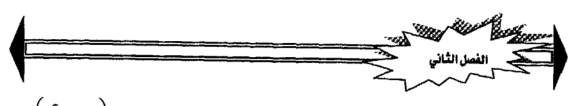
$$\underset{ن\to\infty}{نها} ح\left(د_ن < \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) = ك(ع) = ١ - ٢\sum_{ر=١}^{\infty}(-١)^{ر-١} هـ^{-٢ر^٢ع^٢} \approx ١ - ٢هـ^{-٢ع^٢} \quad \text{.......... (١١)}$$

وعندما تكون ن كبيرة (ن ≥ ٢٠) فإن:

$$ح\left(د_ن < \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) \approx ك(ع) \approx ١ - ٢هـ^{-٢ع^٢} \quad \text{.......... (١٢)}$$

أو: $ح\left(د_ن \geq \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) \approx ٢هـ^{-٢ع^٢}$





هذا يعني أنه يمكن استخدام التوزيع $ك_{(ع)}$ كتقريب جيد لـ $ح\left(د_ن < \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)$ في التطبيقات الإحصائية وذلك عندما تكون $(ن \leq ٢٠)$.

تستخدم مبرهنة كالماغورورف لإيجاد الحدين (القيمتين) اللذين تقع بينهما دالة التوزيع ق(س)، عندما تكون هذه الأخيرة غير معلومة، وذلك باحتمال معين $\alpha \in (٠، ١)$، حيث إن:

$$ح\left(د_ن < \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}}\right) = ح\left(ق^*_ن(ن) - \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}} < ق(س) < ق^*_ن(ن) + \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}}\right) \quad ; \quad \forall س \in ح$$

وعندما تكون $(ن \leq ٢٠)$ فإن $ع_\alpha$ تعين من المساواة: $ك_{(ع)} = \alpha$.

هكذا، عندما تكون $(ن \leq ٢٠)$، فإن المتباينة:

$$ق^*_ن(ن) - \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}} < ق(س) < ق^*_ن(ن) + \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}} \; ; \; \forall س \in ح \quad \text{.................} \quad (١٣)$$

محققة باحتمال يساوي α تقريباً، لكن $٠ \leq ق(س) \leq ١$، وبالتالي يمكن كتابة المتباينة (١٣) على النحو الآتي:

$$\text{قيمة عظمى}\left(٠، ق^*_ن(ن) - \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}}\right) ق(س) < \text{قيمة صغرى}\left(١، ق^*_ن(ن) + \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}}\right)$$

تكمن أهمية الإحصاء $د_ن(س)$ في توزيعه مستقل عن توزيع المجتمع الذي سنبحث منه العينة س، أي أن $د_ن$ حر التوزيع، ويمكن إثبات ذلك على النحو الآتي:

إذا رمزنا بـ ق(س) = ل فإن:

$$س = ق^{-1}(ل)$$



وبالتعويض في (٩)، نجد:

$\text{د}_{\text{ن}} = \text{قيمة قصوى}\left|\text{ق}^{*}_{\text{ن}}[\text{ق}^{-1}(\text{ل})] - \text{ل}\right|$.

وبالانتقال إلى المتغيرات العشوائية:

$\text{ل}_{\text{ي}} = \text{ق}(\text{س}_{\text{ي}})$ ؛ ي= ١، ... ، ن

$\text{ل}_{(1)} \leq \text{ل}_{(2)} \leq \ldots \leq \text{ل}_{(\text{ن})}$ ؛ $\text{ل}_{\text{ي}} = \text{ق}(\text{س}_{\text{ي}})$ ؛ ي= ١، ... ، ن

الإحصاءات المرتبة للعينة (ل_{1}، ... ، $\text{ل}_{\text{ن}}$).

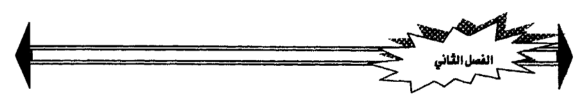
وبملاحظة أن المتباينة $\text{س}_{(\text{ي})} \leq \text{س}$ مكافئة للمتباينة $\text{ل}_{(\text{ي})} \leq \text{ل}$ وبالتعويض في العلاقة (٣)، نجد:

$$\text{ق}^{*}_{\text{ن}}[\text{ق}^{-1}(\text{ل})] = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{س} - \text{س}_{(\text{ي})}) = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}(\text{ل} - \text{ل}_{\text{ي}}) = \Phi^{*}_{\text{ن}}(\text{ل}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٤)$$

يعني هذا أن الدالة $\text{ق}^{*}_{\text{ن}}(\text{س})$ لا تعتمد على الدالة ق(س)، وكما نعلم أن توزيع $\text{ل}_{\text{ي}} = \text{ق}(\text{س}_{\text{ي}})$ هو التوزيع المنتظم ح(٠، ١) و $\Phi^{*}_{\text{ن}}(\text{ل})$ دالة التوزيع التجريبي الموافقة للعينة الملاحظة ل= (ل_{1}، ... $\text{ل}_{\text{ن}}$) المأخوذة من التوزيع ح(٠، ١) وعلى ذلك فإن $\text{د}_{\text{ن}}$ (س) يطابق $\text{قيمة قصوى}_{\text{ل}} \left|\Phi^{*}(\text{ل}) - \text{ل}\right|$، ومن ثم توزيع $\text{د}_{\text{ن}}$ مستقل عن ق(س) (لا يعتمد على توزيع المجتمع الأساسي).

وهذه الخاصة لها أهمية كبيرة، حيث يكفي حساب وجدولة توزيع $\text{د}_{\text{ن}}$ مرة واحدة من أجل عينات عشوائية مأخوذة من التوزيع ح(٠، ١).

بناءً على ذلك وعلى التوزيع المقارب $\text{ك}_{(\text{ع})}$ تم بناء جدول اختبار



كالماغوروف، الذي يعطي القيم الحرجة λ الموافقة لكل من الاحتمال α وحجم العينة ن، بحيث:

$$ح(د_ن \leq \lambda) = \alpha .$$

وعندما تكون ن كبيرة، فإن: $ح\left(د_ن \leq \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) \approx 2هـ^{-2ع^2}$

ومنها: $ح\left(د_ن \leq \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right) = \alpha \Leftarrow \alpha \approx 2هـ^{-2ع^2}$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين، نجد: $ع_\alpha \approx \sqrt{\frac{-1}{2} لو_هـ \frac{\alpha}{2}}$

وهذا يعني، عندما تكون ن كبيرة فإن الحد الحرج λ_α يعين من الصيغة التقريبية:

$$\lambda_\alpha = \frac{ع_\alpha}{\sqrt{ن}} \approx \sqrt{\frac{-1}{2} لو_هـ \frac{\alpha}{2}}$$

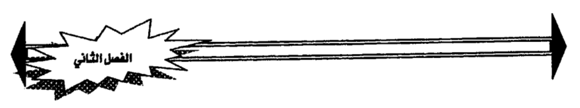
بالإضافة إلى ما سبق، فإن خاصة حر التوزيع لـ $د_ن$، أدت إلى استخدام واسع لهذا الإحصاء في التطبيقات الإحصائية، وخاصة في مجال الاستدلال الإحصائي اللا معلمي.

مبرهنة: مبرهنة سميرنوف Smirnove Theorem

إذا كانت $ق^*_{ن_1}(س)$، $ق^*_{ن_2}(س)$ دالتي التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي المستمر ع الموافقتين لعينتين عشوائيتين بحجم $ن_1$، $ن_2$ على الترتيب، والمأخوذتين من توزيع ق(س)، وكان:

$$د_{ن_1 ن_2} = \underset{-\infty < س < \infty}{قيمة\ قصوى} \left| ق^*_{ن_1}(س) - ق^*_{ن_2}(س) \right|$$





فإن:

$$\text{نهـا}_{\text{ن}_1،\text{ن}_2\to\infty} \text{ح}\left(\sqrt{\text{ن}_1\text{ن}_2 / \text{ن}_1+\text{ن}_2}\ \text{د}_{\text{ن}_1\text{ن}_2} < \text{ع}\right) = \text{ك}(\text{ع})$$

من أجل أي عدد حقيقي $\text{ع} > 0$، حيث إن الدالة $\text{ك}_{(\text{ع})}$ معرفة بالعلاقة (٢) ولهذه المبرهنة استخدام هام في اختبار الفرضيات.

*** *التوزيع المقارب لوسيط العينة***

Asymptotic Distribution of Sample Median

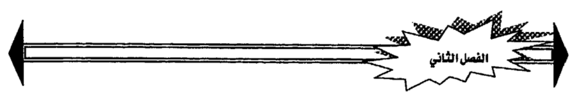
وجدنا في فقرة ماضية أن التوزيع الاحتمالي لوسيط عينة عشوائية $\text{س} = (\text{س}_1، \dots ، \text{س}_\text{ن})$ مأخوذة من توزيع مستمر ق(س).

وذلك عندما يكون حجم العينة ن صغيراً أو كبيراً، سنبحث في هذه الفقرة عن التوزيع التقريبي لوسيط عينة عشوائية كبيرة الحجم.

كما نعلم، إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1، \dots ، \text{س}_\text{ن})$ عينة عشوائية من توزيع مستمر ق(س)، فإن $(\text{ل}_1، \dots ، \text{ل}_\text{ن})$؛ $\text{ل}_\text{ي} = \text{ق}(\text{س}_\text{ي})$ ؛ ي=١، ... ، ن عينة عشوائية من توزيع منتظم $\mathcal{U}(0، 1)$، وإذا كانت $(\text{ص}_1، \dots ، \text{ص}_2)$؛ $\text{ص}_\text{ي} = \text{س}_{(\text{ي})}$ ؛ ي = ١، ...، ن العينة المرتبة الموافقة لـ س، فإن $(\text{ل}_{(1)}، \dots ، \text{ل}_{(\text{ن})})$؛ $\text{ل}_{(\text{ي})} = \text{ق}(\text{ص}_\text{ي})$؛ ي= ١، ... ، ن العينة المرتبة الموافقة لـ $(\text{ل}_1، \dots ، \text{ل}_\text{ن})$ وأن توزيع الإحصاء $\text{ل}_{(\text{ي})}$ هو:

$$\text{هـ}_\text{ي}(\text{ل}) = \frac{\Gamma(\text{ن}+1)}{\Gamma_{(\text{ي})}\Gamma(\text{ن}-\text{ي}+1)} \text{ل}^{\text{ي}-1} (1-\text{ل})^{\text{ن}-\text{ي}} ، \quad 0 < \text{ل} < 1$$





وقيمته المتوقعة وتبيانه:

$$و(ل_{(ي)}) = \frac{ي}{ن+1} \quad ، \quad ع(ل_{(ي)}) = \frac{ي(ن-ي+1)}{(ن+2)(ن+1)^2}$$

ومن ثم بافتراض حجم العينة فردي (ن=٢م+١)، فإن القيمة المتوقعة والتباين لوسيط عينة عشوائية ($ل_1$، ... ، $ل_ن$) مسحوبة من توزيع منتظم ح(٠، ١) هما (بوضع ي=م+١):

$$و(\bar{ل}) = \frac{1}{2} س \quad ، \quad ع(\bar{ل}) = \frac{1}{٤(ن+2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

وبناءً على المبرهنة الآتية: إذا كان س متغيراً عشوائياً بمتوسط M وتباين σ^2، وكانت ص= ك(س) دالة ما في س، فيمكن الحصول على و(ص) و ع(ص) تقريباً وفق العلاقتين:

$$و ص = ك(M) + \frac{1}{2}\sigma^2 ك''(M)$$

$$ع ص \cong \sigma^2 \left[ك'(M)\right]^2$$

يمكن إيجاد قيمة تقريبية لكل من القيمة المتوقعة والتباين للإحصاء $ص_ي$ باستخدام العلاقة بين $ص_ي$ و $ل_{(ي)}$ على النحو الآتي:

$$ل_{(ي)} = ق(ص_ي) \Longrightarrow ص_ي = ق^{-1}(ل_{(ي)})$$

ومن ثم:

$$و(ص_ي) \approx ق^{-1}\left[و ل_{(ي)}\right] = ق^{-1}\left(\frac{ي}{ن+1}\right)$$



$$ع(ص_ي) \approx \frac{ي(ن-ي+1)}{(ن+2)(ن+1)^2} \frac{1}{\left\{ق\left[ق^{-1}\left(\frac{ي}{ن+1}\right)\right]\right\}^2}$$

وبوضع ي=م+1، نجد: $و\tilde{س} \approx ق^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{M}$

$$ع\tilde{س} \approx \frac{1}{4(ن+2)} \frac{1}{\left\{ق\left[ق^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^2} = \frac{1}{4(ن+2)} \frac{1}{ق^2(\tilde{M})} \approx \frac{1}{4ن ق^2(\tilde{M})}$$

عندما تكون ن كبيرة.

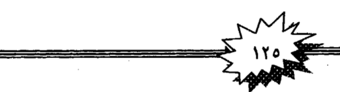
وهذا يعني أن وسيط العينة تقدير غير متحيز تقريباً لوسيط المجتمع $\tilde{M}$.

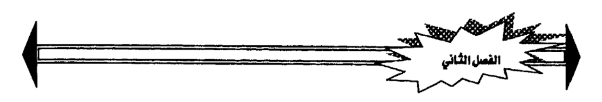
مبرهنة: إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالية ق(س) ودالة توزيعه ق(س)، فإن وسيط هذه العلاقة $\tilde{س}$ يتوزع تقريباً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $و\tilde{س}$ $\tilde{M}$ وتباين $ع\ \tilde{س} = \frac{1}{4ن\ ق^2(\tilde{M})}$ عندما تكون ن كبيرة.

أي أن:

$$ل(\tilde{س}) = ن^{(1)}\left(\tilde{M}، \frac{1}{4ن ق^2(\tilde{M})}\right)$$

ومن ثم: $ل\left[2\sqrt{ن}ق(\tilde{M})(\tilde{س}-\tilde{M})\right] \approx ن^{(1)}(0،1)$





تمارين

١- إذا كان ع متغيراً عشوائياً يصف درجات الطلاب في مقرر ما (حيث الدرجة من ١٠٠)، وأخذت ١٨ ملاحظة مستقلة، فكانت على النحو الآتي: ٨١، ٥٧، ٥٩، ٥٦، ٧٢، ٦٨، ٤٦، ٥٤، ٤٢، ٨٢، ٨٧، ٨٢، ٨٥، ٨٢، ٦٦، ٦٠، ٨٢، ٥٩.

المطلوب:

١. بناء جدول التوزيع التكراري لدرجات الطلاب.

٢. إيجاد دالة التوزيع التجريبي لـ ع الموافقة للعينة الملاحظة.

٣. رسم المدرج التكراري للتوزيع التجريبي لدرجات الطلاب.

٢- ليكن لدينا التوزيع التجريبي لمتغير عشوائي مستمر كما هو مبين في الجدول الآتي:

جدول التوزيع التجريبي

القيم الملاحظة س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار النسبي ني/ن	٠,٥	٠,١٠	٠,١٥	٠,٣٠	٠,٢٠	٠,١٥	٠,٠٥

المطلوب:

١. إيجاد دالة التوزيع التجريبي لـ ع.

٢. رسم المدرج والمضلع للتوزيع التجريبي لـ ع.

٣. ما هو نوع توزيع ع الذي تستقرئه من شكل المدرج أو المضلع التكراري؟.



٣- إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من مجتمع ينبع توزيع ق(س، Θ)، فبين أي من الدوال الآتية يمثل إحصاء:

$$ت_{١} = \sum س_{ي} + \Theta \quad ، \quad ت_{٢} = \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} \quad ، \quad ت_{٣} = \prod_{ي=١}^{ن} \frac{س_{ي}}{\Theta^{٢}}$$

$$ت_{ي} = \sum_{ي=١}^{ن-١} لو_{هـ} س_{ي} \quad ، \quad ت_{٥} = هـ^{\Theta س_{ي}} \quad ، \quad ت_{٦} = \frac{س_{١} س_{٢}}{س_{ن}}$$

٤- إذا كانت س=(س١، س٢، س٣) عينة عشوائية من التوزيع ح(٠، ١) فأوجد توزيع كل من المتغيرين:

$$\bar{س} ، \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$$

٥- إذا كانت س=(س١، س٢) عينة عشوائية من التوزيع ن[1](٠، ١) فأوجد:

١. توزيع $\frac{س_{٢} - س_{١}}{\sqrt{٢}}$

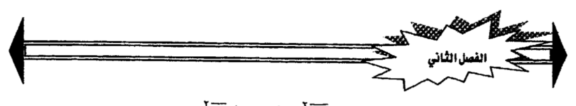
٢. توزيع $\frac{(س_{١} + س_{٢})^{٢}}{(س_{١} - س_{٢})^{٢}}$

٣. توزيع $\frac{(س_{١} + س_{٢})}{\sqrt{(س_{١} - س_{٢})^{٢}}}$

٤. توزيع $\frac{س_{٢}^{٢}}{س_{١}^{٢}}$

٦- بفرض س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من التوزيع ن[1](٠، ١)، أوجد:

١. توزيع $\frac{(\bar{س}_{ك} + \bar{س}_{ن-ك})}{٢}$ ؛ ك<ن



٢. توزيع $ك < ن$ ؛ $ك\bar{س}_{ك}^{2}+(ن-ك)\,\bar{س}_{ن-ك}^{2}$

٣. توزيع $\frac{س_{1}}{س_{ن}}$

٧- إذا كانت $س=(س_{1}،\ س_{2})$ و $ص=(ص_{1}،\ ص_{2})$ عينتين عشوائيتين مستقلتين من التوزيع $ن^{(1)}(0،\ 1)$ و $ن^{(1)}(1،\ 1)$ على الترتيب، فأوجد:

١. توزيع $\bar{س}+\bar{ص}$

٢. $\sqrt{\left[(س_{2}-س_{1})^{2}+(ص_{1}-ص_{2})^{2}\right]/2}\ /(ص_{1}-ص_{2})$

٣. $\left(2\bar{س}-2\right)^{2}/(س_{2}-س_{1})^{2}$

٨- لتكن $ل(س_{ي})=ن^{(1)}(ي،\ ي^{2})$؛ $ي=1،\ 2،\ 3$ و $س_{1}،\ س_{2}،\ س_{3}$ متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى:

١. أعط مثالاً لإحصاء يتبع بتوزيع λ^{2} بثلاث درجات حرية.

٢. أعط مثالاً لإحصاء يتبع توزيع $ق_{1،2}$.

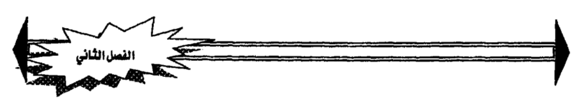
٣. أعط مثالاً لإحصاء يتبع توزيع م (٢).

٩- إذا كانت $س=(س_{1}،\ ...\ ،\ س_{ن})$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم $ح(-2،\ 2)$، فأوجد:

١. توزيع كل من المتغيرين $س_{(1)}$ و $س_{(ن)}$.

٢. التوزيع المشترك لـ $س_{(1)}$ و $س_{(2)}$.

٣. توزيع وسيط العينة $\tilde{س}$ بافتراض أن ن عدد فردي.



١٠- إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع ل(U) J Γ (١، Θ). فأوجد:

١. التوزيع الاحتمالي لـ س= (س١، ... ، سن).

٢. التوزيع الاحتمالي لـ (س(١)، ... ، س(ن)).

٣. التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرين س(١) و س(ن) ثم احسب متوسط وتباين كل منهما.

٤. التوزيع الاحتمالي لكل من المدى ح= س(ن)−س(١) وتصف المدى ت.

١١- إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من التوزيع ح(−٣، ٣) فأوجد متوسط وتباين كل من المتغيرات الآتية:

$\frac{س_{(1)}+س_{(2)}}{2}$ ، س(ن)−س(١)، س(ك+١) ؛ ن=٢ك+١

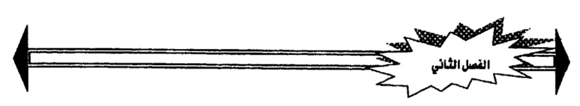
١٢- إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من التوزيع: ى(س)=٢هـ $^{-2(س-3)}$ ؛ س ≤ ٣ فأوجد:

١. التوزيع الاحتمالي س(ن)−س(١).

٢. التوزيع الاحتمالي لوسيط العينة سَ.

٣. التوزيع الاحتمالي لـ ح=س(ن)−س(١).





١٣- إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1 ، \text{س}_2)$ عينة عشوائية من التوزيع الأسي:

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{2} \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{س}}$ ، $\text{س} > 0$ فأوجد $\text{س}_1 / \text{س}_2$.

١٤- إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1 ، \text{س}_2)$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم $\text{ح}(0 ، 1)$، وكانت $\text{ص}^* = (\text{ص}_1^* ، \text{ص}_2^*)$ العينة المرتبة الموافقة لـ س، فأوجد التوزيع الشرطي لـ ص_2^* بفرض $\text{ص}_1^* = \text{ص}_1$.

١٥- إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1 ، \ldots ، \text{س}_\text{ن})$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم $\text{ح}(\text{أ} - \sqrt{3}\text{ب} ، \text{أ} + \sqrt{3}\text{ب})$ حيث أ، ب ثوابت حقيقية،

وكانت $\text{ص}_1 ، \ldots ، \text{ص}_\text{ن}$ الإحصاءات المرتبة الموافقة لـ س، فأوجد:

١. متوسط وتباين $\text{ص}_\text{ن} - \text{ص}_1$.

٢. متوسط وتباين $\frac{\text{ص}_\text{ن} - \text{ص}_1}{2}$

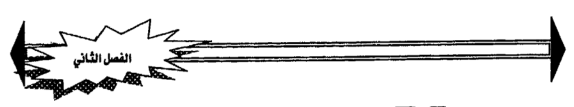
٣. توزيع وسيط العينة $\tilde{\text{س}}$.

١٦- إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1 ، \ldots ، \text{س}_\text{ن})$ عينة عشوائية من توزيع ق(س)، وكانت العزوم المركزية (حول المتوسط) من المرتبة ٢ر لهذا التوزيع موجودة، فأثبت أن:

$$\text{ع}(\text{م}_{\text{ن}\text{ر}}) = \frac{1}{\text{ن}}\left[M_{2\text{ر}} - M_\text{ر}^2 - \text{ر}_{(\text{ر}-1)} M_2 M_{\text{ر}-2} + \text{ر} M_{\text{ر}-2}\left(M_2 M_{\text{ر}-1}\right) - 2M_{\text{ر}+1}\right] + \text{O}\left(\frac{1}{\text{ن}^2}\right)$$

١٧- إذا كانت $\text{س} = (\text{س}_1 ، \ldots ، \text{س}_\text{ن})$ و $\text{ص} = (\text{ص}_1 ، \ldots ، \text{ص}_\text{ن})$ عينتين عشوائيتين مستقلتين مأخوذتان من التوزيع $\text{ن}^{(1)}(\leq_1 ، \sigma^2)$ و $\text{ن}^{(1)}(\leq_2 ، \sigma^2)$ على الترتيب، فأثبت أن توزيع المتغير العشوائي:





$$\frac{(\overline{س}-\overline{ص})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{ن_1}+\frac{1}{ن_2}\right)\left(\frac{(ن_1-1)م_1^{*2}+(ن_2-1)م_2^{*2}}{ن_1+ن_2-2}\right)}}$$

يتبع توزيع م(ن-٢)، حيث إن:

$$م_1^{*2}=\frac{1}{ن_1-1}\sum_{ي=1}^{ن_1}(س_ي-\overline{س})^2 \quad و \quad م_2^{*2}=\frac{1}{ن_2-1}\sum_{ي=1}^{ن_2}(ص_ي-\overline{ص})^2$$

١٨- إذا كانت لـدينا عينـة عـشوائية س بحجـم (ن = ٢م+١) مـن توزيـع ح(٠، ١)، فأثبت أن وسيط هذه العينة له توزيع ب(م+١، م+١).

١٩- إذا كانت (س١، ... ، سن) عينة عشوائية مـن توزيـع مـستمر ق(س)، وكانـت $د_ن = \underset{س}{قيمة عظمى}|ق_ن^*(س)-ق(س)|$، فأوجـد توزيـع المـتغير العشوائي المنقطع دن عندما ن=٣، ن=٥.

٢٠- ليكن ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الأسي: $ں(س)=\frac{1}{٣}هـ^{-\frac{س}{٣}}$ ؛ س > ٠

سحبت عينة عشوائية بحجم ن=١٠ من هذا التوزيع فكانـت علـى النحـو الآتي:

١، ٣، ٥، ٢,٠، ٤، ٥,٠، ٦,٠، ٢,٢، ٣,٠، ٣

أوجد قيمة الإحصاء $د_ن = \underset{س}{قيمةعظمى}|ق_ن^*(س)-ق(س)|$

٢١- إذا كانت س= (س١، ... ، سن) عينة عشوائية من توزيع مـستمر دالـة توزيعه:

$ں(س)=١-هـ^{-٠,٥س}$ ؛ س > ٠



مقاييس التشتت

Measures of dispersion

الفصل الثالث

مقاييس التشتت

Measures of dispersion

إذا قمنا بحساب الوسط الحسابي لمجموعة البيانات الآتية:

مركز المجموعة	٣,٥	٥,٥	٧,٥	٩,٥
التكرار	٥	٣	٧	٥

وكذلك لمجموعة البيانات:

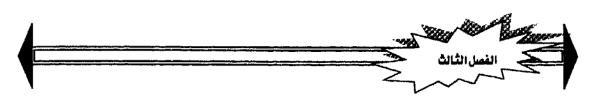
مركز المجموعة	٣,٥	٥,٥	٧,٥	٩,٥	١١,٥
التكرار	٤	٥	٨	١	٢

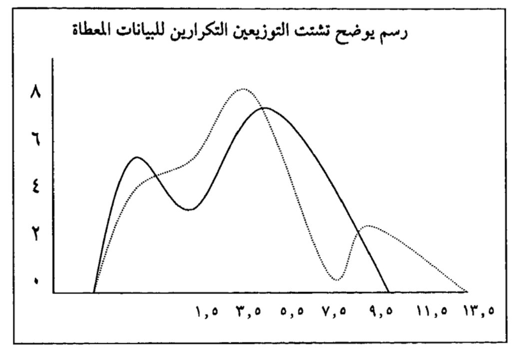
لوجدنا أن كلاً من هاتين المجموعتين من البيانات لهما نفس قيمة الوسط الحسابي $\overline{س}$=٦,٧.

وبالنظر إلى المنحنيات التكرارية لهما الموضحة بالشكل الذي أمامك، لوجدنا أن هناك اختلاف واضح وبينهما فهناك منحنى أقل اتساعاً من الآخر وهذا يدعونا إلى البحث عن مقياس آخر يمكنه قياس الدرجة التي تميل بها البيانات للانتشار حول قيمة الوسط وهو ما يسمى بالتشتت. ومقاييس التشتت نقسمها إلى أربع أنواع هي:

١- المدى Range

٢- نصف المدى الربيعي أو المتغير الربيعي (Semi-Inter Quartile Deviation).





٣. الانحراف المتوسط (The Mean Deviation)

٤. التباين ومعامل الاختلاف (Variance and Coefficient of variation)

وسوف نقوم بشرح كل منها على حدة.

أولاً: المدى Range

وهو أبسط وأسهل مقاييس التشتت فإذا كانت لدينا مجموعة من البيانات $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ فإن المدى هو الفرق بين القيمة العظمى للبيانات ولتكن $س_{عظمى}$ والقيمة الصغرى للبيانات ولتكن هي $س_{صغرى}$ ويمكن كتابته بالصورة:

المدى = $س_{عظمى} - س_{صغرى}$

كذلك إذا كانت البيانات مبوبة فإننا نستبدل القيمة العظمى للبيانات بالحد



الفعلي للمجموعة العليا والقيمة الصغرى بالحد السفلي للمجموعة الدنيا وبالتالي فإن المدى لبيانات مبوبة يعطى كالآتي:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للمجموعة العليا – الحد الأدنى الفعلي للمجموعة الدنيا

واضح أن قيمة المدى تعتمد على القيم الطرفية أو الحدية للبيانات.

فإذا نظرنا إلى الشكل السابق لوجدنا أن المدى يعبر عن طول اتساع فتحة المنحنى إلى أسفل وهو ما يسمى بمنطقة الرسم أو بمدى القيم وهي المنطقة التي تتواجد فيها جميع البيانات.

مثال (١):

أوجد مدى البيانات الآتية: ٢، ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠، ١٤، ١٦.

الحل:

المدى = $س_{\text{عظمى}} - س_{\text{صغرى}}$

= ١٦-٢= ٤

حيث $س_{\text{عظمى}}$ هي القيمة العظمى و $س_{\text{صغرى}}$ هي القيمة الصغرى لهذه البيانات.

مثال (٢):

أوجد مدى البيانات الآتية: ٢، ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠، ١١٦.

الحل:

المدى = $س_{\text{عظمى}} - س_{\text{صغرى}}$

= ١١٦-٢= ١١٤



ملحوظة: في المثالين السابقين لاحظ تأثر المدى بالقيم المتطرفة.

مثال (٣):

أوجد مدى البيانات الآتية:

المجموعات	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩
التكرار	٤	٧	١٥	١١	٤

الحل:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للمجموعة العليا – الحد الأدنى الفعلي للمجموعة الدنيا

المدى = ٨٩,٥ – ٣٩,٥ = ٥٠

وفي أغلب الأحيان يراد عمل مقارنة بين توزيعين لهم وحدات مقياس مختلفة لذا نلجأ لما يسمى باسم المعامل أو القياسات النسبة ومنها المدى النسبي.

تعريف معامل المدى **Coefficient range**

يعرف معامل المدى أو المدى النسبي بأنه النسبة:

$$\text{المدى النسبي} = \frac{س_{عظمى} - س_{صغرى}}{س_{عظمى} + س_{صغرى}}$$

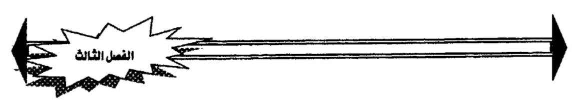
مثال (٤):

أوجد المدى النسبي للبيانات في المثال السابق.

الحل:

يعطى المدى النسبي بالصورة: $\text{المدى النسبي} = \frac{س_{عظمى} - س_{صغرى}}{س_{عظمى} + س_{صغرى}}$





وبالتعويض بالحد الفعلي الأعلى للمجموعة الأخيرة والحد الأدنى الفعلي للمجموعة الأولى فإن المدى النسبي هو:

$$\text{المدى النسبي} = \frac{٨٩,٥ - ٣٩,٥}{٨٩,٥ + ٣٩,٥} = ٠,٣٨٧$$

*** *مميزات المدى:***

١- يسهل فهمه وحسابه.

٢- يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات المعطاة.

*** *عيوبه:***

١- يعتمد في حسابه على قيمتين فقط ويترك بقية القيم.

٢- يتأثر بالقيم المتطرفة.

ثانياً: نصف المدى الربيعي أو التغير الربيعي

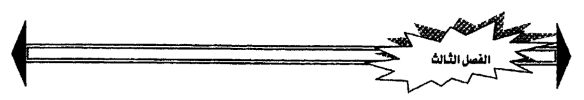
Semi-inter quartile deviation

يعرف نصف المدى الربيعي بأنه نصف الفرق بين الربيع الثالث $ر_٣$ والربيع الأول $ر_١$ ويعطى بالصورة:

$$ر = \frac{١}{٢}(ر_٣ - ر_١)$$

وفي معظم الأحوال نجد أن ٥٠٪ من البيانات تقع بين الربيع الأول $ر_١$ والربيع الثالث $ر_٣$ وباستبعاد أجزاء البيانات المتطرفة التي تقع قبل $ر_١$ وبعد $ر_٣$ فإننا نجد أن قيمة نصف المدى الربيعي تزداد بزيادة تشتت ٥٠٪ من البيانات التي تقع حول الوسط الحسابي وتقل قيمته بزيادة تركيزها وانتظامها.





وكما عرفنا نصف المدى الربيعي يمكننا تعريف نصف المدى العشيري وذلك باستبدال ر١ بـ ع١ واستبدال ر٣ بـ ع٩ ويمكن أيضاً بالمثل تعريف نصف المدى المئيني.

*** *تعريف معامل الاختلاف الربيعي Coefficient quartile deviation***

يعرف معامل الاختلاف الربيعي بأنه النسبة:

$$\text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١}$$

مثال (٥):

احسب معامل الاختلاف للبيانات الآتية:

درجات الرياضيات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٠	٢٢	٢٥	١٠	٥	٨٠

الحل:

ن = ٨٠ هو عدد البيانات نقوم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:

أقل من الحدود الدنيا للمجموعة	التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب
أقل من ٩,٥	٠
أقل من ١٩,٥	٨
أقل من ٢٩,٥	١٨
أقل من ٣٩,٥	٤٠
أقل من ٤٩,٥	٦٥
أقل من ٥٩,٥	٧٥
أقل من ٦٩,٥	٨٠



١. لحساب $ر_1$ فإننا نوجد ترتيبه وهو $\frac{ن}{٤}=\frac{٨٠}{٤}=٢٠$ وعليه فإن:

أ= ٢٩,٥ ، $ق_1$= ١٨ ، $ق_2$= ٤٠ ، هـ= ١٠

وبالتالي نقوم بالتعويض في:

$$ر_1 = أ + \frac{\frac{ن}{٤} - ق_1}{ق_2 - ق_1} . هـ$$ أي أن $$ر_1 = ٢٩,٥ + \frac{٢٠-١٨}{٤٠-١٨} . (١٠) = ٣٠,٤$$

٢. بالمثل لحساب $ر_3$ فإن ترتيبه هو $\frac{٣ن}{٤}=\frac{٣\times٨٠}{٤}=٦٠$ وبالتالي فإن:

أ= ٣٩,٥ ، $ق_1$= ٤٠ ، $ق_2$= ٦٥ ، هـ= ١٠

وعليه $$ر_3 = أ + \frac{\frac{٣ن}{٤} - ق_1}{ق_2 - ق_1} . هـ$$ أي أن $$ر_3 = ٣٩,٥ + \frac{٦٠-٤٠}{٦٥-٤٠} . (١٠) = ٤٧,٥$$

وبالتالي فإن معامل الاختلاف الربيعي هو= $\frac{٤٧,٥-٣٠,٤}{٤٧,٥+٣٠,٤}$= ٠,٢٢

*** *مميزات نصف المدى الربيعي أو التغير الربيعي:***

١- يسهل فهمه وحسابه.

٢- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

٣- يسهل حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

*** *عيوبه:***

١- لا يعتمد في حسابه على جميع القيم المعطاة وبالتالي فهو لا يمثلها تمثيل جيد.

٢- لا يمكن التعامل معه في المعالجات الجبرية.

ثالثاً: الانحراف المتوسط The mean diviation

أ) الانحراف المتوسط لبيانات غير مبوبة

يعرف الانحراف المتوسط لمجموعة من القيم غير المبوبة ولتكن $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$ بأنه متوسط الانحرافات المطلقة لهذه القيم عن الوسط الحسابي $\overline{س}$، أي أنه يساوي:

$$\text{الإنحراف المتوسط} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ن} ق_ي \left| س_ي - \overline{س} \right|$$

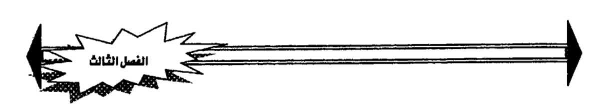
ولتوضيح ذلك فإذا كان لدينا القيم ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ فإن وسطها الحسابي هو $\overline{س}$=٤ وبالتالي تكون انحرافات هذه القيم عن العدد ٤ هي كالآتي: ٢-٤، ٣-٤، ٤-٤، ٥-٤، ٦-٤ أي تساوي القيم -٢، -١، ٠، ١، ٢ وعليه فإن القيم المطلقة لهذه القيم تكون بإمالتنا الإشارة السالبة ويكون |٢|=٢، |١|= ١، |٠|=٠، |-١|-١، |-٢|=٢

وبإيجاد متوسط هذه القيم نجد أنه يساوي $\frac{٦}{٥}$ هو الانحراف المتوسط.

ب) الانحراف المتوسط البيانات المبوبة

يعرف الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات المبوبة مراكز مجموعاتها هي $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_م$ وبتكرارات مناظرة هي $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$، ....، $ق_م$ بأنه متوسط الانحرافات المطلقة لهذه المراكز عن الوسط الحسابي $\overline{س}$، أي أنه يساوي:

$$\text{الإنحراف المتوسط} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{م} \left| س_ي - \overline{س} \right|$$



حيث $ن = \sum_{ي=1}^{ك} ق_ي$.

ويمكن كتابة المقدار $د_ي = س_ي - \bar{س}$ للتبسيط.

الانحراف المتوسط $= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ك} ق_ي |د_ي|$

مثال (٦):

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية:

المجموعات	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩
التكرار	٢	٩	١٥	١١	٢	١

الحل:

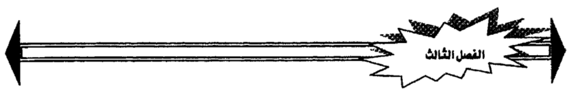
نكون الجدول الآتي:

مراكز المجموعات س	التكرار ق	ق س	$د = س - \bar{س}$	ق |د|
٤٤,٥	٢	٨٩	-٢١,٢٥	٤٢,٥
٥٤,٥	٩	٤٩٠,٥	-١١,٢٥	١٠١,٢٥
٦٤,٥	١٥	٩٦٧,٥	-١,٢٥	١٨,٧٥
٧٤,٥	١١	٨١٩,٥	٨,٧٥	٩٦,٢٥
٨٤,٥	٢	١٦٩,٠	١٨,٧٥	٣٧,٥
٩٤,٥	١	٩٤,٥	٢٨,٧٥	٢٨,٧٥
المجموع	٤٠	٢٦٣٠		٣٢٥

الوسط الحسابي هو:- $\bar{س} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ك} ق_ي س_ي$ ، $ن = \sum_{ي=1}^{ك} ق_ي$

$\frac{٢٦٣٠}{٤٠} = ٦٥,٧٥$





وبالتالي فإن الانحراف المتوسط هو:

$$= \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ك} ق_ي |د_ي|$$

$$\frac{٣٢٥}{٤٠} = ٨,١٢٥$$

رابعاً: التباين ومعامل الاختلاف

The variance and coefficient of variation

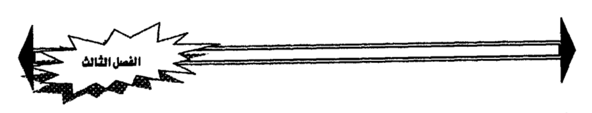
أ) التباين: يعتبر كل من التباين والانحراف المعياري وجهان لعملة واحدة ويعتبر كل منهما من أهم المقاييس الإحصائية والشائعة الاستخدام سواء في الإحصاء الوصفي أو الاستدالي والعلاقة التي تربط التباين بالانحراف المعياري تجعلنا نتحدث عن أحدهم ويكون للثاني نفس الخصائص. فالتباين هو مربع الانحراف المعياري وهو مقياس لمدى تباعد وتقارب البيانات من بعضها البعض فكلما صغرت قيمته دل ذلك على انتظام وانسجام وتقارب القيم والعكس كلما زادت قيمته كان دليل على تشتت هذه القيم.

يعرف التباين بأنه متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي لها. ويرمز له بالرمز $\sigma^{٢}$ أو نكتب الحروف الأولى من الكلمات المكونة له باللغة الإنجليزية كالآتي تباين (س) حيث س تعني الظاهرة تحت الدراسة.

أي أن:

$$\sigma = \sqrt{\text{تباين (س)}}$$





أ) التباين والانحراف المعياري لبيانات غير مبوبة

وإذا كان لدينا مجموعة من القيم غير المبوبة ولتكن:

$س_1، س_2، س_3، \ldots، س_ن$ لها الوسط الحسابي $\overline{س}$ فإن التباين لها هو:

تباين (س) $= \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \overline{س})^2$ ويمكن تبسيط صورة التباين السابقة كالآتي:

$$تباين (س) = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي^2 - \frac{2\overline{س}}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي + \frac{\overline{س}^2}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} 1$$

$$= \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي^2 - \left(\frac{\sum_{ي=1}^{ن} س_ي}{ن}\right)^2 = \overline{س^2} - (\overline{س})^2$$

مثال (٧):

أوجد الانحراف المعياري والتباين للقيم الآتية: −١٠، ٠، ٥، ١٠، ٢٥، ٣٠

الحل:

س	$د = س - \overline{س}$	$د^2$
−١٠	−٢٠	٤٠٠
٠	−١٠	١٠٠
٥	−٥	٢٥
١٠	٠	٠
٢٥	١٥	٢٢٥
٣٠	٢٠	٤٠٠
$\sum_{ي=1}^{ن} س_ي = ٦٠$		١١٥٠



$$\bar{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$$

وبالتالي فإن التباين هو: تباين (س) $= \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} د_ي^2 = \frac{١١٥٠}{٦} = ١٩١,٦٧$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري هو:

$\sigma = \sqrt{\text{تباين (س)}} = ١٣,٨٤$.

ويمكن إيجاد نفس النواتج باستخدام الصور المباشرة الآتية:

$$\sigma^2 = \overline{س^2} - (\bar{س})^2 = \frac{١٧٥٠}{٦} - \left(\frac{٦٠}{٦}\right)^2 = ١٩١,٦٧$$

ب) التباين والانحراف المعياري لبيانات مبوبة

إن كان لدينا مجموعة من البيانات المبوبة مراكز مجموعاتها هي $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ....، $س_م$ بتكرارات متناظرة هي $ق_١$، $ق_٢$، $ق_٣$، ....، $ق_م$ ولها الوسط الحسابي $\bar{س}$، فإن التباين لهذه البيانات هو:

$$\text{تباين (س)} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{م} ق_ي (س_ي - \bar{س})^2 \quad , \quad ن = \sum_{ي=1}^{م} ق_ي$$

ويمكن تبسيط الصورة السابقة كما سبق في حالة البيانات غير المبوبة كالآتي:

$$\text{تباين (س)} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{م} ق_ي س_ي^2 - \left(\frac{\sum_{ي=1}^{م} ق_ي س_ي}{ن}\right)^2$$

حيث $ن = \sum_{ي=1}^{م} ق_ي$



هي مجموع التكرارات.

مثال (٨):

أوجد الانحراف المعياري والتباين لمجموعة البيانات:

الدرجات	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩
عدد الطلاب	٤	١٣	١٨	١٤	١٢	٦	٣

الحل:

المجموعات	المراكز $س_ي$	التكرار $ق_ي$	$ق_ي س_ي$	$ق_ي س_ي^{٢}$
٢٠-٢٩	٢٤,٥	٤	٩٨	٢٤٠١
٣٠-٣٩	٣٤,٥	١٣	٤٤٨,٥	١٥٤٧٣,٢٥
٤٠-٤٩	٤٤,٥	١٨	٨٠١	٣٥٦٤٤,٥
٥٠-٥٩	٥٤,٥	١٤	٧٦٣	٤١٥٨٣,٥
٦٠-٦٩	٦٤,٥	١٢	٧٧٤	٤٩٩٢٣
٧٠-٧٩	٧٤,٥	٦	٤٤٧	٣٣٣٠١,٥
٨٠-٨٩	٨٤,٥	٣	٢٥٣,٥	٢١٤٢٠,٧٥
المجموع		$\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي = ٧٠$	$\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي س_ي = ٣٥٨٥$	$\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي س_ي^{٢} = ١٩٩٧٤٧,٥$

وبالتالي فإن التباين هو:

$$\text{تباين (س)} = \frac{١}{ن} \left(\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي س_ي^{٢} - \frac{\left(\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي س_{٢} \right)^{٢}}{ن} \right)$$



$$= \frac{١}{٧٠}\left(١٩٩٧٤٧,٥ - \frac{(٣٥٨٥)^{٢}}{٧٠}\right) = ٢٣٠,٦٣$$

ومنها فإن الانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{٢٣٠,٦٣} = ١٥,١٩$

ملحوظة: تسمى الطريقة السابقة بالطريقة المباشرة ويعيب على هذه الطريقة صعوبة الحسابات وطول الوقت المستغرق فيها عندما تكون البيانات كبيرة.

خصائص التباين والانحراف المعياري

١. إضافة أو طرح أي عدد حقيقي ثابت من جميع البيانات لا يؤثر على قيمة التباين أو الانحراف المعياري.

وعند استخدامنا لهذه الخاصية فإن الطريقة المتبعة تسمى بالطريقة المختصرة.

أي بفرض أن أ هو وسطاً فرضياً لظاهرة ما س فإن:

تباين (س ± أ) = تباين (س)

البرهان:

نستخدم تعريف التباين فإن:

$$\text{تباين}\ (\text{س}\pm\text{أ}) = \overline{(\text{س}\pm\text{أ})^{٢}} - \left(\overline{\text{س}\pm\text{أ}}\right)^{٢}$$

$$= \overline{(\text{س}^{٢}\pm ٢\text{أس}+\text{أ})} - (\overline{\text{س}}\pm\text{أ})^{٢}$$

وباستخدام خصائص الوسط الحسابي فإن:

$$\text{تباين}\ (\text{س}\pm\text{أ}) = (\overline{\text{س}^{٢}}\pm ٢\text{أ}\overline{\text{س}}+\text{أ}) - (\overline{\text{س}}^{٢}\pm ٢\text{أ}\overline{\text{س}}+\text{أ}^{٢})$$

$$\text{تباين}\ (\text{س}\pm\text{أ}) = \overline{\text{س}^{٢}} - \overline{\text{س}}^{٢}$$

= تباين (س).



٢. عند قسمة جميع البيانات على عدد ثابت لا يساوي الصفر (يكون في الغالب طول المجموعة) فإن قيمة التباين للبيانات القديمة يساوي قيمة التباين للبيانات الجديدة مضرباً في مربع هذا العدد.

$$\text{تباين}\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)=\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\ \text{تباين (س)}.$$

البرهان:

$$\text{تباين}\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)=\overline{\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)^{2}}-\overline{\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)}^{2}$$

$$=\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\overline{\left(\text{س}^{2}\pm 2\text{أس}+\text{أ}^{2}\right)}-\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\left(\overline{\text{س}}\pm\text{أ}\right)^{2}$$

وباستخدام خصائص الوسط الحسابي فإن:

$$\text{تباين}\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)=\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\left(\overline{\text{س}^{2}}\pm 2\text{أ}\overline{\text{س}}+\text{أ}^{2}\right)-\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\left(\overline{\text{س}}^{2}\pm 2\text{أ}\overline{\text{س}}+\text{أ}^{2}\right)$$

$$\text{تباين}\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)=\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\left(\overline{\text{س}^{2}}-\overline{\text{س}}^{2}\right)=\frac{1}{\text{هـ}^{2}}\ \text{تباين (س)}$$

$$\text{أي أن تباين (س)}=\text{هـ}^{2}\times\text{تباين}\left(\frac{\text{س}\pm\text{أ}}{\text{هـ}}\right)$$

ملحوظة: وتسمى الطريقة التي تستخدم هاتين الخاصيتين السابقتين أي طرح عدد ثابت من جميع البيانات يسمى بالوسط الفرضي ثم قسمة الناتج على عدد الثابت بالطريقة المختزلة.

وهذه الطريقة تستخدم للتغلب على مشكلة تضخم الأرقام وصعوبة

الحسابات. لوحظ في المثال السابق كبر الأرقام وتضخمها لذا سوف نقوم في المثال القادم بتوضيح عمل الطريقة المختزلة.

٣. قيمة التباين لأي ظاهرة قيمة غير سالبة دائماً أي أن تباين $(\text{س}) \geq 0$

البرهان: يترك للطالب.

٤. إذا كانت جميع قيم الظاهرة ثابتة أي متساوية فإن التباين لهذه الظاهرة يساوي صفر.

البرهان: إن الوسط الحسابي لكمية ثابتة يساوي نفس هذه الكمية الثابتة وبالتالي إذا كانت جميع قيم الظاهرة س ثابتة وتساوي جـ فإن:

$\bar{\text{س}} = \text{جـ}$

وعليه تباين (جـ) $= \overline{(\text{جـ})^2} - \overline{(\text{جـ})}^2 = \text{جـ}^2 - (\text{جـ})^2 = 0$

٥. إذا كان لدينا مجموعتان حجمهما ن_1 و ن_2 ولهما الأوساط الحسابية $\bar{\text{س}}_1$ و $\bar{\text{س}}_2$ والتباينات σ_1 و σ_2 على الترتيب فإن التباين المشترك لهما هو:

$$\sigma^2 = \frac{\text{ن}_1\sigma_1^2 + \text{ن}_2\sigma_2^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} + \frac{\text{ن}_1\text{د}_1^2 + \text{ن}_2\text{د}_2^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} \quad , \quad \text{د}_\text{ي} = \bar{\text{س}}_\text{ي} - \bar{\text{س}}$$

ويساوي $\sigma^2 = \frac{\text{ن}_1\sigma_1^2 + \text{ن}_2\sigma_2^2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$ عندما تتساوى الأوساط الحسابية للمجموعتين.

البرهان: بفرض أن قيم المجموعة الأولى هي $\text{س}_1, \text{س}_2, \dots, \text{س}_{\text{ن}_1}$ وقيم المجموعة الثانية هي $\text{ص}_1, \text{ص}_2, \dots, \text{ص}_{\text{ن}_2}$ فإن التباين المشترك لهما هو:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(\sum_{ي=1}^{ن_1}\left(س_ي - \overline{س}\right)^2 + \sum_{ي=1}^{ن_2}\left(ص_ي \overline{س}\right)^2\right)$$

حيث $\overline{س} = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(\sum_{ي=1}^{ن_1} س_ي + \sum_{ي=1}^{ن_2} ص_ي\right)$

وبفـرض أن $د_2 = \overline{س_2} - \overline{س}$ ، $د_1 = \overline{س_1} - \overline{س}$ فإنـه بإضـافة وطـرح وسـطي المجموعتين إلى قيم $س_ي$، $ص_ي$ فإن التباين المشترك يمكن كتابته على الصورة:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(\sum_{ي=1}^{ن_1}\left(س_ي - \overline{س_1} + د_1\right)^2 + \sum_{ي=1}^{ن_2}\left(ص_ي \overline{س_2} + د_2\right)^2\right)$$

وبفك الأقواس المربعة واستخدام خـصائص الوسـط الحـسابي فـإن النـاتج يصبح على الصورة:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(\sum_{ي=1}^{ن_1}\left(س_ي - \overline{س_1}\right)^2 + \sum_{ي=1}^{ن_2}\left(ص_ي \overline{س_2}\right) + ن_1 د_1^2 + ن_2 د_2^2\right)$$

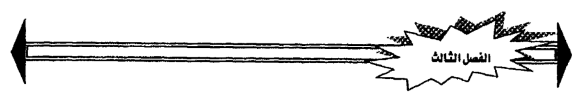
والذي يمكن كتابته كالآتي:

$$\sigma^2 = \frac{ن_1 \sigma_1^2 + ن_2 \sigma_2^2}{ن_1 + ن_2} + \frac{ن_1 د_1^2 + ن_2 د_2^2}{ن_1 + ن_2} \quad ؛ \quad د_ي = \overline{س_ي} - \overline{س} ،\ ن_1 + ن_2$$

ونجد أن الحـد الأخـير يـساوي صـفراً عنـدما تتـساوى الأوسـاط الحـسابية للمجموعتين أي $\overline{س_1} = \overline{س_2}$ حيث سنجد أن:

$$\overline{س} = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(\sum_{ي=1}^{ن_1} س_ي + \sum_{ي=1}^{ن_2} ص_ي\right) = \frac{1}{ن_1 + ن_2}\left(ن_1 \overline{س_1} + ن_2 \overline{س_2}\right)$$

$$= \frac{(ن_1 + ن_2)}{ن_1 + ن_2}\overline{س_1} = \overline{س_1}$$



ومنها فإن $د_1 = د_2 = 0$

أي أن $\sigma^2 = \frac{ن_1 \sigma_1^2 + ن_2 \sigma_2^2}{ن_1 + ن_2}$

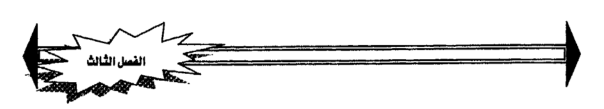
مثال (٩):

أوجد الانحراف المعياري والتباين لمجموعة البيانات في المثال السابق باستخدام الطريقة المختزلة.

الحل:

نقوم باختيار وسط فرضي بتوسط مجموعة البيانات لتسهيل العملية الحسابية وليكن أ=٥٤,٥ وطرحه من جميع مراكز المجموعات ثم قسمة الناتج على طول المجموعة هـ = ١٠ ووضع الناتج $د = \frac{س - أ}{هـ}$ في العمود الرابع من الجدول الذي أمامك.

المجموعات	المراكز $س_ي$	التكرار $ق_ي$	$د_ي = \frac{س - ٥٤,٥}{١٠}$	$ق_ي د_ي$	$ق_ي د_ي^2$
٢٠-٢٩	٢٤,٥	٤	-٣	-١٢	٣٦
٣٠-٣٩	٣٤,٥	١٣	-٢	-٢٦	٥٢
٤٠-٤٩	٤٤,٥	١٨	-١	-١٨	١٨
٥٠-٥٩	٥٤,٥	١٤	٠	٠	٠
٦٠-٦٩	٦٤,٥	١٢	١	١٢	١٢
٧٠-٧٩	٧٤,٥	٦	٢	١٢	٢٤
٨٠-٨٩	٨٤,٥	٣	٣	٩	٢٧
المجموع		$\sum_{ي=1}^{ك} ق_ي = ٧٠$		$\sum_{ي=1}^{ك} ق_ي د_ي = -٢٣$	$\sum_{ي=1}^{ك} ق_ي د_ي^2 = ١٦٩$



بفرض أن القيم الجديدة هي للظاهرة $ص=\frac{س-٥٤,٥}{١٠}$ وبالتالي فإن التباين لهذه البيانات الجديدة هو:

$$تباين\ (ص) = \frac{١}{ن}\left(\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي د_ي^٢ - \frac{\left(\sum_{ي=١}^{ن} ق_ي د_ي\right)^٢}{ن}\right)$$

وبالتعويض من الجدول السابق فإن:

$$تباين\ (ص) \ \frac{١}{٧٠}\left(١٦٩ - \frac{(-٢٣)^٢}{٧٠}\right) = ٢,٣٠٦$$

ومنها فإن التباين للبيانات القديمة هو:

$$تباين\ (س) = هـ^٢ \times تباين\ (ص) = ٢٣٠,٦$$

ومنها فإن الانحراف المعياري لها هو $\sigma = \sqrt{٢٣٠,٦} = ١٥,١٩$

ب) معامل الاختلاف

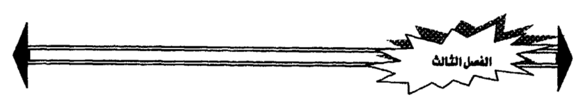
يعرف معامل الاختلاف بأنه مقياس نسبي للتشتت ويعطى بالصيغة الآتية:

$$معامل\ الاختلاف = \frac{\sigma}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

حيث $\bar{س}$، σ هما الانحراف المعياري والوسط الحسابي للبيانات المعطاة على الترتيب.

ومعامل الاختلاف هو دائماً نسبة مئوية وهو مقياس لا يعتمد على الوحدات المستخدمة في القياس لذلك غالباً ما يستخدم هذا المقياس للمقارنة





بين تفاوت مجموعتين مختلفتين من البيانات وعادة لا يكون لهما نفس وحدات القياس مثل الطول والوزن.

مثال (١٠):

أوجد معامل الاختلاف لمجموعة البيانات في المثال السابق.

الحل:

في المثال السابق وجدنا أن الانحراف المعياري لمجموعة البيانات هو $\sigma = \sqrt{٢٣٠,٦} = ١٥,١٩$ وأن الوسط الحسابي لها هو:

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ي} ق_ي د_ي}{\sum_{ي} ق_ي} هـ$$

وبالتعويض من الجدول السابق فإن:

$$\bar{س} = ٥٤,٥ + \frac{-٢٣}{٧٠}(١٠) = ٥١,٢١$$

وعليه فإن:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٥,١٩}{٥١,٢١} \times ١٠٠ = ٢٩,٦٦\%$$

مثال (١١):

إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات حجمها ١٠٠ هما على الترتيب ١٢٠ و٥ ومجموعة أخرى مكونة من ١٢٠ لها اسط



الحسابي ١٠٠ والانحراف المعياري ٤ أوجد الوسط الحسابي المشترك والتباين المشترك ثم وضح أي منهما أكثر تشتت من الأخرى.

الحل:

لدينا للمجموعة الأولى $\sigma_{١}$= ٥، $\overline{س_{١}}$ = ١٢٠، $ن_{١}$= ١٠٠

وللمجموعة الثانية $\sigma_{٢}$= ٤، $\overline{س_{٢}}$ = ١٠٠، $ن_{٢}$= ١٢٠

وبالتالي فإن الوسط الحسابي المشترك هو:

$$\overline{س} = \frac{ن_{١}\overline{س_{١}} + ن_{٢}\overline{س_{٢}}}{ن_{١}+ن_{٢}} \Longrightarrow \overline{س} = \frac{١٠٠\times١٢٠ + ١٢٠\times١٠٠}{١٠٠+١٢٠}$$

$$\overline{س} = ١٠٩,١$$

والآن نوجد التباين المشترك $د_{١}$= ١٢٠-١٠٩,١ = ١٠,٩

كذلك $د_{٢}$= ١٠٠-١٠٩,١ = ٩,١ ويكون التباين المشترك هو:

$$\sigma^{٢} = \frac{ن_{١}\sigma_{١}^{٢} + ن_{٢}\sigma_{٢}^{٢}}{ن_{١}+ن_{٢}} + \frac{ن_{١}د_{١}^{٢} + ن_{٢}د_{٢}^{٢}}{ن_{١}+ن_{٢}} \quad ، \quad د_{ي} = \overline{س_{ي}} - \overline{س}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة فإن:

$$\sigma^{٢} = \frac{١٠٠(٢٥)+١٢٠(١٦)}{١٠٠+١٢٠} + \frac{١٠٠(١٠,٩)^{٢}+١٢٠(-٩,١)^{٢}}{١٠٠+١٢٠}$$

$$\sigma^{٢} = \frac{١٠٠(٢٥)+١٢٠(١٦)}{١٠٠+١٢٠} + \frac{١٠٠(١٠,٩)^{٢}+١٢٠(-٩,١)^{٢}}{١٠٠+١٢٠}$$

$$= ٢٠,١ + ٩٩,١٧ = ١١٩,٢٧$$

معامل الاختلاف المجموعة الأولى هو:

$$= \frac{\sigma_1}{س_1} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٤,١٧\%$$

معامل الاختلاف للمجموعة الثانية هو:

$$= \frac{\sigma_2}{س_2} \times ١٠٠$$

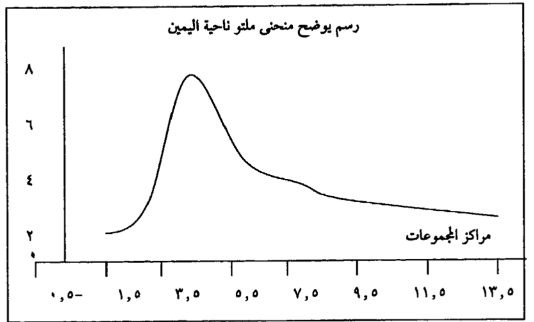
$$= \frac{٤}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٤\%$$

أي أن المجموعة الثانية أقل تشتت من المجموعة الأولى.

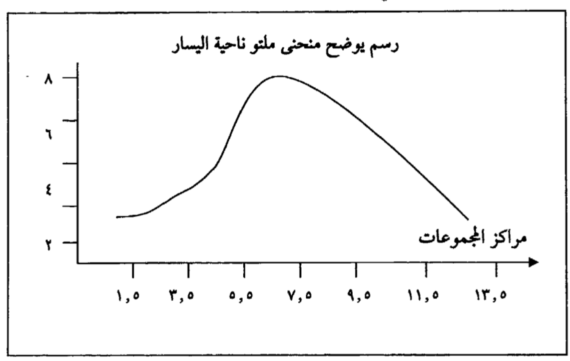
وهناك مقاييس يمكن بها معرفة الشكل التقريبي لمنحنى التوزيع التكراري ومنها مقاييس الالتواء ومقاييس التفلطح والعزوم. وسوف نقوم بشرح كل منها على حدة كما يلي:

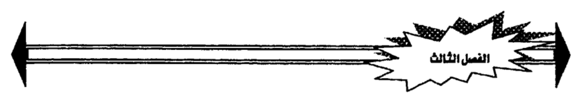
*** مقاييس الالتواء Measures of skewness**

يقصد بكلمة التواء المنحنى هو نقص في تماثل المنحنى. وهذا النقص ناتج من عدم تماثل التوزيع التكراري للبيانات حول الوسط الحسابي، فالتواء المنحنى يعني أن أحد جوانب المنحنى أكبر من الجهة الأخرى ونقول بأن المنحنى ملتو ناحية اليمين (موجب الالتواء) إذا الجزء الأكبر من المنحنى واقع جهة اليمين وفيها يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيط أو المنوال انظر الشكل الآتي:



والعكس نقول أنه ملتو ناحية اليسار (سالب الالتواء) إذا كان الجزء الأكبر من المنحنى يقع جهة اليسار وفيه يكون الوسط الحسابي أقل من قيمة الوسيط والمنوال انظر الشكل الآتي:





وهناك مقاييس عديدة للالتواء الغرض منها معرفة اتجاه الالتواء وإلى أي مدى يبعد هذا المنحنى عن التماثل:

المقياس الأول للالتواء = الوسط الحسابي - المنوال

وهذا يعتمد على موقع الوسط من المنوال ويمكن أن نرى أن معامل الالتواء الأول هو:

معامل الالتواء الأول= $\frac{\bar{س} - \text{المنوال}}{\sigma}$

وإذا كان المنحنى ملتو التواء بسيطاً فيمكن استخدام العلاقة:

$$\frac{٣(\bar{س} - \text{الوسط الحسابي})}{\sigma}$$

وهناك معامل الالتواء الثاني يعتمد في حسابه على الربيعيات وهو:

$$= \frac{ر_٣ + ر_١ - ٢ر_٢}{ر_٣ - ر_١}$$

مثال (١٣):

أوجد معامل الالتواء الأول للبيانات الآتية:

الدرجات	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩
عدد الطلاب	٤	١٣	١٨	١٤	١٢	٦	٣

الحل:

بإيجاد الوسط الحسابي $\bar{س}$=٥١,٢١ والمنوال = ٤٠,٦١ والانحراف المعياري σ= ١٥,١٩ (كما سبق) والتعويض في المعامل الأول للالتواء فإن:



المعامل الأول للالتواء = $\frac{\bar{س} - \text{المنوال}}{\sigma} = \frac{٥١,٢١ - ٤٠,٦١}{١٥,١٩} = ٠,٦٩$

مثال (١٣):

أوجد معامل الالتواء الثاني للبيانات الآتية:

الدرجات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩
عدد الطلاب	٨	١٠	٢٢	٢٥	١٠	٥

الحل:

نعلم أن $ر_١ = ٣٠,٤$ ، $ر_٢ = ٣٩,٥$ ، $ر_٣ = ٤٧,٥$

وبالتالي فإن:

معامل الالتواء الثاني = $\frac{ر_٣ + ر_١ - ٢ر_٢}{ر_٣ - ر_١} = \frac{٤٧,٥ + ٣٠,٤ - ٢(٣٩,٥)}{٤٧,٥ - ٣٠,٤} = -٠,٠٦$

وباستعراضنا للمثالين السابقين فإن الأول موجب الالتواء أما الثاني فهو سالب الالتواء.

* العزوم *Moments*

في الفصل السابق قمنا بحساب الوسط للمجموعة من البيانات المبوبة وغير المبوبة وهذا الوسط يطلق عليه أحياناً العزم الأول للبيانات حول الصفر.

$$\bar{س} = M_١ = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{م} ق_ي س_ي \quad ، \quad ن = \sum_{ي=١}^{م} ق_ي$$

يعرف العزم الرائي أو العزم رقم ر حول الصفر بالصورة

$$M_ر = \frac{١}{ن} \sum_{ي=١}^{م} ق_ي س_ي^ر$$



أما العزم الرائي حول الوسط الحسابي لبيانات مبوبة فيعطى كالآتي:

$$M_{ر} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=1}^{ك} ق_{ي} (س_{ي} - \bar{س})^{ر}$$

واضح أن العزم الثاني حول الوسط الحسابي ما هو إلا التباين أي أن:

$$M_{2} = \text{تباين } (س) = \sigma^{2}$$

*** *التفلطح Kurtosis***

يعرف التفلطح بأنه استواء أو انبساط المنحنى التكراري عند المتوسط وتستخدم مقاييس التفلطح لمعرفة مدى استواء أو تدبب المنحنى التكراري لأي بيانات معطاة مقارنة بمنحنى يسمى المنحنى الطبيعي.

ومن مقاييس التفلطح الذي يعطى كالآتي:

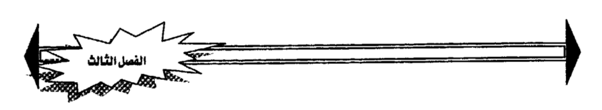
$$B_{2} = \frac{M_{4}}{M_{2}^{2}}$$

حيث $M_{4} = \frac{1}{ن} \sum_{ي=ن}^{ك} ق_{ي} (س_{ي} - \bar{س})^{4}$ و M_{2}^{2} هو مربع التباين.

وتسمى B_{2} بمقياس تحدب المنحنى وهو يساوي $B_{2} = 3$ للمنحنى الطبيعي أما إذا كانت $B_{2} \geq 3$ فإن المنحنى مستو وأقل تحدب من المنحنى الطبيعي وإذا كانت $B_{2} \leq 3$ فإن المنحنى أكثر تحدب وتدبدب من المنحنى الطبيعي.

ويرجع الفضل لقوانين الالتواء التفلطح إلى العالم الفرنسي كارل بيرسون karl pearson.





تمارين

١- أوجد الاختلاف المتوسط والتباين لمجموعة البيانات الآتية:

مركز المجموعة	٣,٥	٥,٥	٧,٥	٩,٥
التكرار	٥	٣	٧	٥

٢- في دراسة لمرض سارس وجد أن:

العمر بالسنة	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩
عدد الحالات	٢	٣	٧	٥	٣

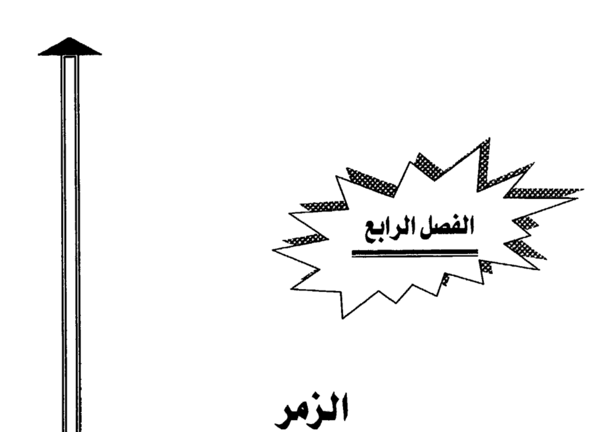
إحسب المدى- الإختلاف المتوسط- التباين وكذلك معامل الإختلاف لهذه البيانات.

٣- إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات حجمها ١٠ هما على الترتيب ١٢ و ٥ ومجموعة أخرى مكونة من ١٢ لها الوسط الحسابي ١٠ والانحراف المعياري ٤ أوجد الوسط الحسابي المشترك والتباين المشترك ثم وضح أي منهما أكثر تشتت من الأخرى.

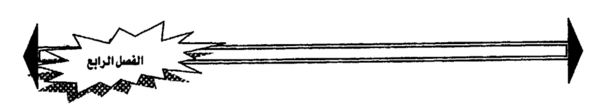
٤- إذا كان الوسط الحسابي لكلا المجموعتين متساوي والانحراف المعياري للمجموعة الأولى هو ٥ وعددها ١٠ للمجموعة الثانية الانحراف المعياري لها هو ٤ وعددها ١٥ أوجد التباين المشترك.

٥- البيانات الآتية هي نتائج طالبين في ٤ اختبارات اختبر أي الطالبين أكثر ثابت وملاءمة من الآخر.





الزمر



الفصل الرابع

الزمـر

Groups

الجبر هو دراسة مختلف الأنواع من الأنظمة المجردة، وإحدى هذه الأنظمة الأساسية هو النوع المعروف بالزمر والذي نتناوله بالدراسة في هذا الفصل، وفكرة الزمرة هي فكرة مشتركة في كثير من فروع الرياضيات نصادفها في التحليل والتبولوجي والمنطق الرياضي وكذلك في المجالات التي تستخدم فيها الرياضيات أداة مثل الفيزياء، والكيمياء، الخ.

بدأت نظرية الزمر تأخذ مكانها منذ نهاية القرن الثامن عشر وتمت دراسة الزمر ببطء في بادئ الأمر ولم يهتم بها إلا القليل وخصوصاً في العقد الأول من القرن التاسع عشر، وفجأة أخذت هذه النظرية قفزة هائلة وخصوصاً قبل وبعد ١٨٣٠ بسنوات قليلة وذلك في عمل جالوا (Galois) وآبيل (Abel) الذي يتعلق بقابلية المعادلات الجبرية للحل، وهذه القفزة شاركت مشاركة فعالة في تقدم الرياضيات.

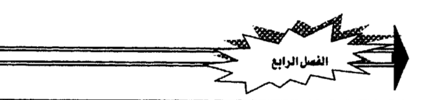
الزمرة نظام جبري ذو عملية ثنائية واحدة تحقق خصائص معينة.

* تعاريف وخواص أولية

تعريف: إذا كانت ك مجموعة غير خالية و* عملية ثنائية على ك، فإن (ك، *) تسمى زمرة إذا تحققت الخواص التالية:

١- إذا كان ٲ، ب ∈ ك، فإن ٲ * ب ∈ ك (خاصية الانغلاق).





٢- إذا كان ؟، ب، جـ ∋ ك فإن (؟ * ب) * جـ= ؟ * (ب * جـ) (الخاصية التجميعية).

٣- هناك عنصر هـ في ك حيث أن ؟ * هـ= هـ * ؟ لكل ؟ ∋ ك (العنصر هـ يسمى العنصر المحايد بالنسبة للعملية *).

٤- لكل عنصر ؟ ∋ ك يوجد عنصر ب في ك حيث أن ؟ * ب = ب * ؟ = هـ (يسمى العنصر ب النظير (incourse) العنصر ؟ بالنسبة للعملية * ويكتب $؟^{-1}$= ب).

نعطي الآن بعض الأمثلة لتوضيح هذا التعريف.

مثال (١):

١- مجموعة الأعداد الصحيحة ص مع عملية الجمع الاعتيادية + تحقق الشروط المطلوبة في التعريف السابق.

إذا كان ؟، ب ∋ ك فإن حاصل جمعهما عدد صحيح وبالتالي فإن: ؟ + ب ∋ ك ، ونعلم جيداً أن عملية جمع الأعداد الصحيحة عملية تجميعية، أما العدد (٠) الصفر فهو العنصر المحايد في عملية جمع الأعداد الصحيحة و ٠∋ ص.

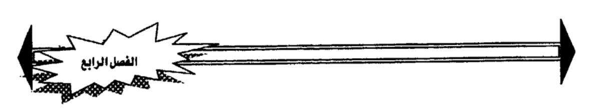
لكل عدد صحيح ؟ هناك العدد الصحيح –؟ حيث أن:

(–؟) + ؟ = ؟ + (–؟) =٠.

إذن (ص، +) زمرة.

٢- مجموعة الأعداد الحقيقية ح مع عملية الجمع الاعتيادية + تحقق كل الشروط المطلوبة لكي تكون (ح، +) زمرة.





٣- لنفرض أن ك= {١، -١، ي، -ي} حيث ي=$\sqrt{-1}$، ولنفرض أن * عملية ضرب الأعداد المركبة.

نستطيع تكوين الجدول التالي الذي يوضح أن (ك، *) زمرة.

*	١	-١	ي	-ي
١	١	-١	ي	-ي
-١	-١	١	-ي	ي
ي	ي	-ي	-١	١
-ي	-ي	ي	١	-١

مثال (٢):

لنفرض أن ك$^+$ مجموعة الأعداد القياسية الموجبة.

عرف العملية الثنائية * على ك$^+$ كما يلي:

$$ﻫ * ب = \frac{ﻫ.ب}{٣}$$ لكل ﻫ، ب ∈ ك$^+$.

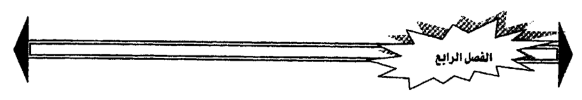
لاحظ أن * عملية مغلقة على ك$^+$ وأن:

$$(ﻫ * ب) * ﺟ = \frac{ﻫ.ب}{٣} * ﺟ = \frac{\frac{ﻫ.ب}{٣}.ﺟ}{٣} = \frac{ﻫ.ب.ﺟ}{٩}$$

$$\text{و } ﻫ * (ب * ﺟ) = ﻫ * \frac{ب.ﺟ}{٣} = \frac{ﻫ.\frac{ب.ﺟ}{٣}}{٣} = \frac{ﻫ.ب.ﺟ}{٩}$$

في هذا المثال العدد ٣ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية *، أي أن:





$٣ * ٩ = ٩ * ٣ = ٩$ لكل $٩ \in ك^+$

وأخيراً:

$٩ * \frac{٩}{٩} = \frac{٩}{٩} * ٩ = ٣$ وهذا يعني أن $٩^{-١} = \frac{٩}{٩}$ لكل $٩ \in ك^+$.

هذا يعني أن $(ك^+، *)$ زمرة.

مثال (٣):

لنفرض أن $م_{٢×٢}$ مجموعة كل المصفوفات من نوع ٢×٢ بمداخل من الأعداد الحقيقية، ولنفرض أن العملية الثنائية * على $م_{٢×٢}$ عملية جمع المصفوفات.

من الواضح أن المصفوفة الصفرية $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد لهذه العملية، وأن لكل مصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٩ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ نظير جمعي $-أ = \begin{bmatrix} -٩ & -ب \\ -جـ & -د \end{bmatrix}$

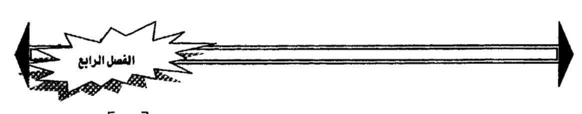
وبالتالي كل الخواص المطلوبة لتكون زمرة متحققة على المجموعة $م_{٢×٢}$ تحت العملية *، وهذا يعني أن $(م_{٢×٢}، *)$ زمرة.

مثال (٤):

لنفرض أن $م_{٢×٢}$ هي مجموعة كل المصفوفات $\begin{bmatrix} ٩ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ من نوع ٢×٢ بمداخل من الأعداد الحقيقية حيث أن $٩ب - ب جـ \neq ٠$.

وأن العملية الثنائية المعرفة على $م_{٢×٢}$ هي عملية ضرب المصفوفات.





من الواضح أن العنصر المحايد لهذه العملية هو $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، وحيث أن

$|أ| = ٲد - ب جـ \neq ٠$ فإنه لكل مصفوفة $ا = \begin{bmatrix} ٲ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ نظير ضربي هو

$\frac{١}{ٲد - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & ٲ \end{bmatrix}$، وكما هو معلوم فإن ضرب المصفوفات عملية مغلقة وتجميعية، ولهذا فإن ($م_{٢\times٢}$، ٭) زمرة.

تعريف: الزمرة (ك، ٭) تسمي زمرة تبديلية (Commutative) إذا كان ٲ ٭ ب = ب ٭ ٲ لكل ٲ، ب ∋ ك.

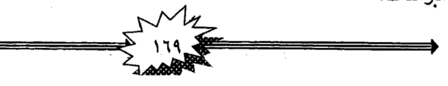
تعريف: إذا كانت ك مجموعة منتهية، فإن الزمرة (ك، ٭) تسمى زمرة منتهية (finite) وعدد عناصرها يسمى رتبة (order) الزمرة (ك، ٭) ويرمز لذلك بالرمز (٠) (ك).

تسمى الزمرة التبديلية في بعض الأحيان بالزمرة الأبيلية (abelian)، الزمر في المثال ١، المثال ٢، المثال ٣ زمر تبديلية، ولكن الزمرة في المثال ٤ زمرة غير تبديلية لأن عملية ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية.

ملاحظة (١):

من الآن فصاعداً نكتب الزمرة ك بدلاً من الزمرة (ك، ٭)، ونكتب ٲب بدلاً من ٲ ٭ ب وذلك للاختصار.

نأتي الآن إلى دراسة بعض الخواص الأولية للزمر والتي نلخصها على شكل مبرهنات:





مبرهنة: إذا كانت ك زمرة، فإن:

١- أجـ = أب يؤدي إلى أن جـ = ب.

٢- جـ أ = ب أ يؤدي إلى أن جـ = ب.

الخاصيتان (١)، (٢) في المبرهنة السابقة يطلق عليهما اسم قانون الاختصار من اليسار وقانون الاختصار من اليمين على الترتيب.

البرهان:

١- لنفرض أن أب= أجـ

بما أن $أ^{-١}$ ∋ ك، فإن الضرب في $أ^{-١}$ من اليسار يعطي $أ^{-١}$ (أب)= $أ^{-١}$ (أجـ)

($أ^{-١}$أ)ب = ($أ^{-١}$أ) جـ　　　من خاصية التجميعية

هـ ب = هـ جـ　　　من خاصية النظير

ب = جـ　　　من خاصية العنصر المحايد

٢- لنفرض أن ب أ= جـ أ بما أن $أ^{-١}$ ∋ ك:

فإن الضرب في $أ^{-١}$ من اليمين يعطي:

(ب أ) $أ^{-١}$ = (جـ أ) $أ^{-١}$

ب (أ $أ^{-١}$)= جـ (أ $أ^{-١}$) خاصية التجميعية.

ب هـ = جـ هـ　　　خاصية النظير.

ب = جـ　　　خاصية العنصر المحايد.

يمتاز العنصر المحايد في الزمرة بأنه عنصر وحيد، وكذلك نظير العنصر لابد أن يكون وحيداً.

المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كانت ك زمرة، فإن:
١- العنصر المحايد هـ في ك وحيداً.
٢- لكل عنصر أ في ك نظير وحيد $أ^{-1}$ في ك.
٣- $(أ^{-1})^{-1} = أ$ لكل أ ∈ ك.
٤- $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$ لكل عنصرين أ، ب ∈ ك.

البرهان:

١- لنفرض أن $هـ_1$، $هـ_2$ كلاهما عنصر محايد في ك. $هـ_1 = هـ_1 هـ_2 = هـ_2$ وهذا يعني أن $هـ_1 = هـ_2$ والذي يوضح أن العنصر المحايد في الزمرة لابد أن يكون وحيداً.

٢- لنفرض أن أ ∈ ك وأن له نظيران س، ص. إذن $س أ = أ س = هـ$

كذلك $ص أ = أ ص = هـ$ ومن ذلك نصل إلى $س أ = ص أ$

ومن قانون الاختصار نجد أن س= ص.

٣- بما أن $(أ^{-1})^{-1} أ^{-1} = هـ$ وكذلك $أ أ^{-1} = هـ$

فإن $(أ^{-1})^{-1} أ^{-1} = أ أ^{-1}$ ومن قانون الاختصار نجد أن $(أ^{-1})^{-1} = أ$

٤- لنفـــرض أن أ، ب ∈ ك ⟸ $(أب)(ب^{-1} أ^{-1}) = أ(ب ب^{-1}) أ^{-1}$
$= أ هـ أ^{-1}$



$(\text{ﻡهـ})\text{ﻡ}^{-1} = \text{ﻡ}\,\text{ﻡ}^{-1} = \text{هـ}$

بنفس الطريقة يمكن استنتاج أن:

$(\text{ب}^{-1}\text{ﻡ}^{-1})\,(\text{ﻡب}) = \text{هـ}$

وهذا يعني أن $\text{ﻡ}^{-1}\text{ب}^{-1}$ هو نظير العنصر ﻡب، أي أن $(\text{ﻡب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\text{ﻡ}^{-1}$.

يمكن تعميم هذه الخاصية إلى أكثر من عنصرين، أي أن:

$(\text{ﻡ}_1\text{ﻡ}_2\ldots\text{ﻡ}_{ن})^{-1} = \text{ﻡ}_{ن}^{-1}\ldots\text{ﻡ}_2^{-1}\text{ﻡ}_1^{-1}$

إذا كان ﻡ عنصر في الزمرة ك، فإن:

$$\text{ﻡ}^1 = \text{ﻡ}،\ \text{ﻡ}^2 = \text{ﻡ}\,\text{ﻡ}،\ \ldots،\ \text{ﻡ}^{ن} = \overbrace{\text{ﻡ}\,\text{ﻡ}\ldots\ldots\ldots\text{ﻡ}}^{\text{ن من المرات}}$$

إذا كانت ك زمرة منتهية وتحتوي ن من العناصر، فإن:

(٠) (ك)=ن وحيث أن ﻡ ∈ ك، فإن $\text{ﻡ}^2 = \text{ﻡ}\,\text{ﻡ} \in$ ك، $\text{ﻡ}^3 = \text{ﻡ}^2\text{ﻡ} \in$ ك... وهكذا $\text{ﻡ}^{م} \in$ ك...، وهذا يعني أن ﻡ، ﻡ^2، ﻡ^3، ...، $\text{ﻡ}^{م}$، ... في ك والذي لا يمكن أن يحصل إلا إذا كان هناك تكرار في هذا التجمع لأن ك منتهية. هذا يعني أن $\text{ﻡ}^{ع} = \text{ﻡ}^{ل}$ حيث ع≠ل، ويمكن فرض ع>ل $\text{ﻡ}^{ع-ل} = \text{ﻡ}^{ل}.\text{ﻡ}^{-ل} = \text{ﻡ}^{ل}\,\text{ﻡ}^{-ل} = \text{ﻡ}^{0}$ = هـ.

إذن هناك على الأقل عدد صحيح موجب م حيث $\text{ﻡ}^{م}$= هـ.

لنفرض أن ن هو أصغر مثل هذه الأعداد الصحيحة الموجبة م.

إذن كان جـ عدد صحيح، فإن هناك عددان صحيحان ر، ي حيث أن:

جـ = ي ن + ر.



و ٠≤ر<ن

إذن

أ^ج = أ^{ي ن+ر} = أ^{ي ن} = أ^ر = (أ^ن)^ي أ^ر

= هـ^ي أ^ر = أ^ر

هذا يعني أن أ^ج هو إحدى العناصر

هـ، أ، أ^٢، أ^٣، ...، أ^{ن-١}

وهذه العناصر مختلفة، لأنه إذا كان:

أ^ي = أ^ر حيث ٠≤ي<ر<ن

فإن: أ^{ر-ي} = هـ و ٠<ر-ي<ن

وهذا يناقض كون ن هو أصغر الأعداد الصحيحة الموجبة حيث أ^ن= هـ.

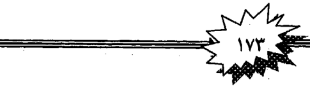
إذا كانت الزمرة ك تحتوي على عنصرين فقط، فإن أحدهما لابـد أن يكـون العنصر المحايد هـ والعنصر الآخر أ حيث أ ≠ هـ.

الآن:

ك = {هـ، أ}

*	هـ	أ
هـ	هـ	أ
أ	أ	هـ

إذا كونا جدول للزمرة ك، فإننا نلاحظ من الجدول أن هـ هـ = هـ، هـ أ= أ، أهـ = أ ولكن أ أ غير واضح.



نعلم أن أ أ لابد أن يكون عنصر في ك، بمعنى آخر، أ أ لابد أن يساوي هـ أو أ.

إذا كان أ أ = أ، فإن أ أ= أ= أهـ

وهذا يعني أن أ= هـ وهو تناقض.

إذن:

أ أ= هـ

مثال (٥):

كون جدول لزمرة ك تحتوي على ثلاث عناصر.

*	هـ	أ	ب
هـ	هـ	أ	ب
أ	أ	ب	هـ
ب	ب	هـ	أ

إذا كونا جدول للزمرة نلاحظ أن

هـ هـ = هـ، هـ أ= أ، هـ ب = ب، أهـ = أ

وكذلك ب هـ = ب.

بما أن أ ≠ هـ و ب≠ هـ ومن قانون الاختصار

أب ≠ أ و أب ≠ ب وحيث أن أب في ك، فإن أب ≠ هـ.

بنفس الكيفية نجد أن بأ= هـ.

الآن أ أ ≠ أ وكذلك أ أ ≠ هـ لأن تساويهما يؤدي إلى أن أ= هـ وهذا تناقض.

إذن أ أ = ب وكذلك ب ب = أ، وبذلك نحصل على الجدول الكامل للزمرة ك= {هـ، أ، ب}.

تمارين

١- إذا كانت ك = {-١، ١}، فوضح أن ك تحت عملية الضرب الاعتيادية تكون زمرة.

٢- وضح أن:

$$ك = \left\{ ١، \frac{-١+ي\sqrt{٣}}{٢}، \frac{-١-ي\sqrt{٣}}{٢} \right\}$$

تحت عملية ضرب الأعداد المركبة تكون زمرة رتبتها ٣.

٣- إذا كانت ك = {هـ، أ، ب، جـ} زمرة حيث (٠) (ك) = ٤ و هـ^{٢}= أ^{٢}= ب^{٢} = جـ^{٢} = هـ، فأوجد جدول لهذه الزمرة.

٤- لنفرض أن ك زمرة حيث أ^{٢}= هـ لكل أ ∈ ك.

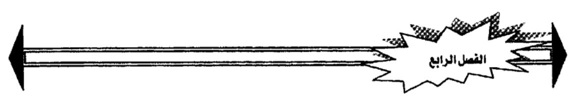
برهن أن ك زمرة تبديلية.

٥- لنفرض أن أ، ب عنصرين في الزمرة ك. إذا كان (أب)$^{-١}$= أ$^{-١}$ب$^{-١}$، فبرهن أن أب= ب أ.

٦- إذا كانت ك زمرة تبديلية، فبرهن أن (أب)^{ن}= أ^{ن}ب^{ن}.

٧- إذا كانت ص مجموعة الأعداد الصحيحة وإذا كانت العملية * المعرفة على ص هي أ*ب= أ+ب+١ برهن أن ص تحت هذه العملية زمرة.

٨- إذا كانت س مجموعة وكانت ρ(س) مجموعة كل المجموعات الجزئية من



س وإذا عرفت العملية * على ρ(س) بحيث أن أ*ب = (أ∪ب) − (أ∩ب).

برهن أن ρ(س) تحت هذه العملية زمرة تبديلية.

*** الزمر الجزئية والمجموعات المصاحبة subgroups and cosets**

قد تكون المجموعة المراد دراستها مجموعة جزئية من زمرة معينة، وفي هذه الحالة قد يتبادر إلى الذهن السؤال التالي:

ما هي الشروط التي تتوفر في المجموعة الجزئية من زمرة معينة حتى تكون زمرة في حد ذاتها؟.

من الأمثلة التي درست يمكن استنتاج أن هناك مجموعات جزئية بشروط معينة من زمرة عند تقييد العملية المعرفة على الزمرة على تلك المجموعات الجزئية يقود ذلك إلى زمر جديدة.

نركز انتباهنا في هذا البند على مثل هذا النوع من المجموعات الجزئية لزمرة معطاة.

تعريف:

لنفرض أن ك زمرة. المجموعة الجزئية غير الية ل من الزمرة ك تسمى زمرة جزئية (Subgroups) من ك بالنسبة للعملية المعرفة على ك إذا كانت ل في ذاتها زمرة تحت تلك العملية.

من الملاحظ أن لكل زمرة ك زمرتين جزئيتين هما الزمرة ك نفسها والزمرة الجزئية التافهة {ل}، كل الزمر الجزئية الأخرى للزمرة ك تسمى بالزمر الجزئية الفعلية.



قد يكون من الأفضل بناء معيار لتحديد ما إذا كانت المجموعة الجزئية غير الخالية من زمرة ك زمرة جزئية.

المبرهنة التالية توضح طريقة مثلى لتوضيح أن مجموعة جزئية من زمرة ك تصلح لأن تكون زمرة جزئية أم لا.

مبرهنة: لنفرض أن ل مجموعة جزئية غير خالية من زمرة ك.

ل زمرة جزئية من ك إذا وإذا كان فقط أ، ب $\in$ ل يؤدي إلى أن $أب^{-1} \in$ ل.

البرهان:

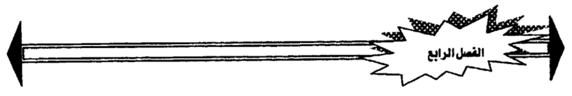
إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، وكان أ، ب $\in$ ل، فإ $ب^{-1} \in$ ل لأن ل زمرة في حد ذاتها، وبالتالي $أب^{-1} \in$ ل من خاصية الانغلاق.

إذا كانت ل مجموعة جزئية غير خالية من ك ولكل أ، ب $\in$ ل يكون $أب^{1}$ $\in$ل، فإن ل تحتوي على الأقل على عنصر واحد أ. نستطيع أن نأخذ أ=ب وبالتالي $أأ^{-1}$ = هـ $\in$ ل.

لكل عنصر $\in$ أ ل، فإن $أ^{-1}$= هـ $أ^{-1}$، وأخيراً إذا كان أ، ب $\in$ ل فإن أب = $أ(ب^{-1})^{-1}$ $\in$ ل حيث أن ل مجموعة جزئية من ك، فإن قانون التجميع المتحقق في ك لابد أن يكون متحققاً في ل.

هذا يوضح أن كل الشروط المطلوبة للزمرة قد تحققت في المجموعة الجزئية غير الخالية ل.

إذن ل زمرة جزئية من ك.



تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية لزمرة ك هو أيضاً زمرة جزئية من ك، نضع هذه الحقيقة في المبرهنة التالية التي نترك برهانها للقارئ.

مبرهنة: تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية لزمرة ك هو أيضاً زمرة جزئية من ك.

إذا كانت المجموعة الجزئية غير الخالية من زمرة ك مجموعة منتهية فإن الأمر قد يكون بسيط وأبسط من المذكور في المبرهنة ما قبل السابقة للتحقق من أن تلك المجموعة الجزئية تكون زمرة جزئية، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: المجموعة الجزئية المنتهية ل$\neq \Phi$ من الزمرة ك زمرة جزئية من ك إذا كان ٲ ب $\in$ ل لكل ٲ، ب $\in$ ل.

بمعنى آخر المجموعة الجزئية المنتهية غير الخالية من زمرة ك تكون زمرة جزئية إذا كانت مغلقة تحت عملية الزمرة ك.

البرهان:

اعتماداً على المبرهنة الواردة في بداية الفصل نحتاج إلى برهنة أنه إذا كان:

ٲ $\in$ ل، فإن ٲ$^{-1}$$\in$ ل.

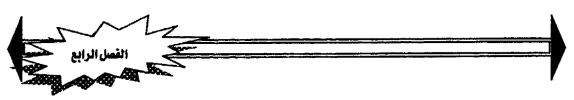
لنفرض أن ٲ $\in$ ل.

لاحظ أن ٲ^{2}= ٲ ٲ $\in$ ل، .... ، ٲ^{ن} $\in$ ل، ...، ٲ^{3}= ٲ^{2}ٲ $\in$ ل

وحيث أن ل مجموعة منتهية و ٲ، ٲ^{2}، ٲ^{3}، ...، ٲ^{ن}، .... كلها في ل، فإن هناك تكرار، أي أن:

ٲ^{ر} = ٲ^{ن} لعددين صحيحين ر، ن حيث ر<ن.





من قانون الاختصار الذي يعتبر صحيحاً في الزمرة ك نجد أن $أ^{ر-ن} = هـ$

لاحظ أن $أ^{ر-ن-1} \in ل$ و $أ(أ^{ر-ن-1}) = (أ^{ر-ن-1})أ = هـ$

وهذا يعني أن $أ^{-1} = أ^{ر-ن-1} \in ل$

إذن ل زمرة جزئية من ك.

* المجموعة المصاحبة Cosets

إذا كانت ل زمرة جزئية من زمرة ك، فإن ل تشكل تجزيء للزمرة ك يتكون من مجموعات منفصلة تسمى مجموعات مصاحبة Cosets.

قبل تعريف المجموعات المصاحبة نتعرض لتعريف علاقة متكافئة لها أهمية كبرى في دراسة المجموعات المصاحبة.

تعريف: لنفرض أن ك زمرة وأن ل زمرة جزئية من ك. إذا كان $أ$ ب $\in$ ك، فإننا نقول بأن $أ$ يطابق ب مقياس ل إذا كان $أب^{-1} \in ل$. رمزياً $أ = ب$ (mod ل) إذا كان $أب^{-1} \in ل$.

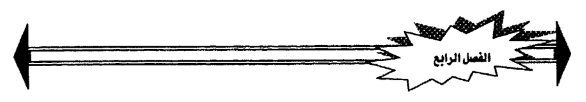
١- $أ = أ$ (mod ل)

٢- إذا كان $أ = ب$ (mod ل) و $ب = جـ$ (mod ل) فإن $أ = جـ$ (mod ل)

ولتوضيح ذلك:

أ- $أ أ^{-1} = هـ \in ل$ لأن ل زمرة جزئية من ك.





ب- إذا كان ٲ = ب (mod ل) فإن ٲب$^{-1}$ ∈ ل هذا يؤدي إلى أن (ٲب$^{-1}$)$^{-1}$ ∈ ل لأن ل زمرة جزئية من ك، ولكن (ٲب$^{-1}$)$^{-1}$ = بٲ$^{-1}$ وهذا يعني أن ب = ٲ (mod ل).

جـ- إذا كان ٲ = ب (mod ل) و ب = جـ (mod ل) فإن ٲب$^{-1}$ ∈ ل و ب جـ$^{-1}$ ∈ ل وهذا يؤدي إلى أن ٲجـ$^{-1}$ = (ٲب$^{-1}$) (ب جـ$^{-1}$) ∈ ل لأن ل زمرة جزئية من ك، وبالتالي يكون ٲ = جـ (mod ل).

نتعرض الآن لتعريف المجموعة المصاحبة لزمرة جزئية ل من زمرة ك.

تعريف: إذا كانت ل زمرة جزئية من الزمرة ك، فإن المجموعة المصاحبة اليسرى (Left Coset) للزمرة الجزئية ل من الزمرة ك هي ٲل = {ٲل*: ل* ∈ ل}

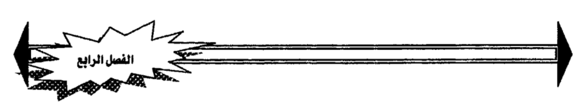
بنفس الأسلوب يمكن تعريف المجموعة المصاحبة اليمنى (right coset) للزمرة الجزئية ل من الزمرة ك لتكون لٲ = {ل*ٲ: ل* ∈ ل}

تعرضنا في دراستنا السابقة إلى تعريف الفصل اتكافئ للعنصر ٲ في المجموعة ٲ والذي يحدد بواسطة علاقة تكافئ معرفة على المجموعة أ، وعرفنا في النقاش للتعريف السابق علاقة التطابق (والتي وضحنا أنها علاقة متكافئة على الزمرة الجزئية ل)، وبذلك فإن فصل التكافئ للعنصر ٲ هو:

[ٲ] = {س ∈ ك : ٲ = س (mod ل)}

المبرهنة التالية توضح العلاقة بين فصل التكافئ للعنصر ٲ في الزمرة ك والمجموعة المصاحبة للزمرة الجزئية ل من ك التي يحددها العنصر ٲ.





مبرهنة: إذا كانت ل زمرة جزئة من الزمـرة ك، فإنـه لأي عنـصر ٢ ∋ ك يكـون ل٢ = [٢]

لنفرض أن ل*٢ ∋ ل٢ لاحظ أن ٢(ل٢)$^{-١}$ = ٢ (٢$^{-١}$ ل$^{-١}$)

= (٢ ٢$^{-١}$) ل$^{-١}$ = هـ ل*$^{-١}$ ∋ ل

لأن ل زمرة جزئية من ك. وهذا يعني أن ٢ = ل*٢ (mod ل)

وبذلك يكون ل*∋ ٢ [٢] وهذا يوصلنا إلى أن ل٢⊆[٢] .... (١)

الآن لنفرض أن س ∋ [٢]

هذا يعني أن ٢س$^{-١}$ ∋ ل، ومن المعلـوم أن (٢س$^{-١}$) = س٢$^{-١}$، وحيـث أن ل زمرة جزئية من ك، فإن ٢س$^{-١}$ ∋ ل.

نستطيع فرض ٢س$^{-١}$ ∋ ل*، وهذا يعني أن س = ل*٢، وبـذلك نـصل إلى أن س ∋ ل، وهذا يعني أن [٢]⊆ل٢.................... (٢)

من (١) و (٢) نستنتج أن ل٢= [٢]

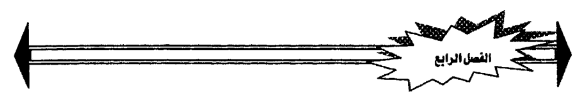
المبرهنة السابقة توصلنا إلى الاستنتاج التالي:

يمكن تجزيء الزمرة ك بواسطة مجموعات مصاحبة يمنى منفـصلة، أي أن أي مجموعتين مصاحبتين يمنـى للزمـرة الجزئيـة ل في ك إمـا أن تكونـا متطـابقتين أو تكونا منفصلتين.

لنفرض أن ٢، ب ∋ ل وأن ٢ ≠ ب و ل زمرة جزئية من زمرة ك.

هناك تناظر أحادي بين المجموعات المصاحبة اليمنى ل٢ والمجموعة المـصاحبة اليمنى ل ب، أي أن حيث φ (ل*٢) = ل*ب فإن ل٢ $\xrightarrow{\varphi}$ ل ب





من الملاحظ أن φ دالة فوقية.

الآن إذا كـان $ل_{1}^{*}$، $ل_{2}^{*}$ ∋ ل و φ($ل_{1}^{*}$ أ)=φ($ل_{2}$ أ)، فـإن $ل_{1}^{*}$ ب=$ل_{2}^{*}$ ب ومن قانون الاختصار نصل إلى أن $ل_{1}^{*}$=$ل_{2}^{*}$ وهذا يعني أن φ دالة أحادية.

عندما تكون ل زمرة جزئية منتهية من المزمرة ك، فإن هناك سؤال يتبـادر إلى الذهن وهو: ما هو عدد عناصر المجموعة المصاحبة اليمنى ل أ؟

للإجابة على هذا السؤال نلاحظ أن ل = ل هـ ولقد وجـدنا تنـاظر أحـادي بين المجموعة المصاحبة اليمنى ل أ والمجموعة المصاحبة اليمنى ل = ل هـ.

ومن ذلك نصل إلى الإجابة وهو أن عدد عناصر المجموعة المصاحبة ل أ هـو عدد عناصر الزمرة الجزئية ل، أي أن (٠) (ل) = (٠) (ل أ).

فإذا كان عدد المجموعـات المـصاحبة اليمنـى للزمـرة الجزئيـة ل مـن الزمـرة المنتهية ك هو λ، فإن λ(٠) (ل) = (٠) (ك)

خلاصة النقاش السابق هو برهان المبرهنة التالية:

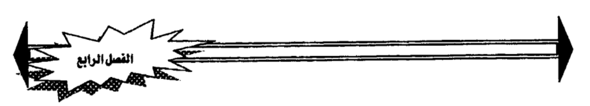
> مبرهنة: إذا كانت ك زمرة منتهية وكانت ل زمرة جزئية مـن ك، فـإن رتبـة الزمرة الجزئية ل قاسم لرتبة الزمرة ك.

إذا كانت ك زمرة منتهية، فإن عدد المجموعات المـصاحبة اليمنـى (اليـسرى) للزمرة الجزئية ل من ك يسمى دليل ل في ك، ويرمـز لـذلك بـالرمز [ك: ل] أي أن:

[ك: ل] = عدد المجموعات المصاحبة اليمنى للزمرة الجزئية ل من ك.

= عدد المجموعات المصاحبة اليسرى للزمرة الجزئية ل من ك.





النتيجة التالية توضح العلاقة بين رتبة الزمرة ك، ورتبة الزمرة الجزئية ل من ك، ودليل ل من ك.

نتيجة (١): لنفرض أن ك زمرة منتهية وأن ل زمرة جزئية من ك.

عندئذ يكون (٠) (ك) = [ك: ل] (٠) (ل).

البرهان:

حيث أن ك هي اتحاد المجموعات المصاحبة اليمنى المنفصلة للزمرة الجزئية ل من ك، وحيث أن عدد المجموعات المصاحبة اليمنى يساوي [ك: ل] فإن:

(٠) (ك) = [ك: ل] (٠) (ل)

عدد الزمر الجزئية لزمرة ك من المواضيع المهمة التي يعالجها الجبر المجرد، ولكن ذلك يحتاج إلى الكثير من المعلومات التي لم نتزود بها حتى الآن، ولكن يمكن الوصول إلى بعض النتائج حول هذا الموضوع بالمعلومات التي تزودنا بها حتى الآن، النتيجة التالية تسلط بعض الضوء على هذا الموضوع.

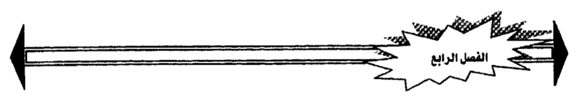
نتيجة (٢): إذا كان (٠) (ك) عدد أولي، فإن الزمرة ك ليس لها زمر جزئية عدا {هـ}، ك.

البرهان:

لنفرض أن (٠) (ك) = ن حيث ن عدد أولي.

إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فإن (٠) (ل) يقسم (٠) (ك)، وهذا يعني أن (٠) (ل) يساوي ١ أو ن.





إذن إما ل = {هـ} أو هـ = ك.

تمارين

١- إذا كانت $\{ل_\alpha\}$ عائلة زمر جزئية من ك، فبرهن أن $\bigcap_\alpha ل_\alpha$ زمرة جزئية من ك.

٢- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فبرهن أن $ٳل ٳ^{-1} = \{ ٳل^* ٳ^{-1} : ل^* \in ل\}$ زمرة جزئية من ك، عندما يكون $ٳ \in$ ك.

٣- إذا كانت ك زمرة منتهية وإذا كان $ٳ \in$ ك، فبرهن أن هناك عدد صحيح موجب ن حيث أن $ٳ^ن$ = هـ.

٤- لنفرض أن ك زمرة وأن ٳ عنصر ثابت في ك.

وضح أن المجموعة $\{س \in ك: سٳ = ٳس\}$

٥- إذا كانت ل زمرة جزئية من الزمرة التبديلية ك، فوضح أن أي مجموعة مصاحبة يمنى للزمرة الجزئية ل من ك هي أيضاً مجموعة مصاحبة يسرى للزمرة الجزئية ل من ك.

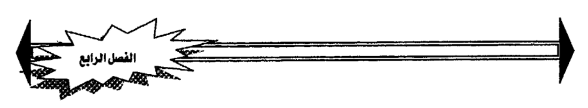
٦- لنفرض أن ل زمرة جزئية من ك. إذا كان [ك: ل] = ٢، فبرهن أن ك زمرة تبديلية.

٧- لنفرض أن ل زمرة جزئية من ك.

إذا كان جـ (ل) = $\{س \in ك : س ل^* = ل^* س ، ل^* \in ل\}$ برهن أن جـ (ل) زمرة جزئية من ك.

٨- إذا كان ك زمرة، فبرهن أن:ع(ك) = $\{ ق \in ك: ق س = س ق، س \in$





ك} زمرة جزئية من ك.

٩- لنفرض أن ل زمرة جزئية من الزمرة ك. إذا كان ن (ل) = {أ ∈ ك: أل*أ$^{-1}$ = ل} برهن أن ن (ل) زمرة جزئية من ك وأن ل≤ن(ل).

١٠- إذا كانت زمرة جزئية من ك، وإذا كانت ق زمرة جزئية من ل، فبرهن أن ق زمرة جزئية من ك.

الزمر الدائرية Cyclic Groups

لنفرض أن أ عنصر في الزمرة ك، وأن ل زمرة جزئية من ك تحتوي على العنصر أ. المجموعة <أ> = {أ^{ن}: ن ∈ ص} زمرة جزئية من ك وإضافة إلى ذلك فإن <أ>≤ل الزمرة الجزئية <أ> هي تقاطع كل الزمر الجزئية من ك والتي تحتوي على أ.

تعريف: إذا كان هناك عنصر في الزمرة ك بحيث أن ك = <أ>، فإن الزمرة ك، في هذه الحالة تسمى زمرة دائرة (Cyclic Groups)، ويسمى العنصر أ في هذه الحالة مولد الزمرة ك.

مثال (٦):

الزمرة (ص، +) دائرة ومولدها العدد ١، أي أن ص = <١>، ويمكن أن تولد الزمرة (ص، +) كذلك بالعدد -١، أي أن ص = <-١>.

مثال (٧):

لنفرض أن (ص، +) زمرة الأعداد الصحيحة تحت العملية +.

<٣> = {...، -٩، -٦، -٣، ٠، ٣، ٦، ٩، ...}





لاحظ أن <٣> = ٣ص

نستطيع تعميم ذلك لأي عدد صحيح ن، أي أن <ن> = ن ص

إضافة إلى ذلك، فإن ن ص = ص إذا وإذا كان فقط ن = ± ١.

مثال (٨):

إذا كانت (ح، +) زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع، فإنه إذا كان $\lambda \neq 0$ عدد حقيقي، فإن الزمرة $\langle\lambda\rangle$ = {نλ : ن ∈ ص} زمرة جزئية دائرية من (ح، +) مولدها العنصر λ.

لا يوجد أي عدد صحيح ن حيث أن ن$\lambda = \frac{1}{2\lambda}$، وهذا يؤدي إلى أن $\langle\lambda\rangle \neq$ ح. الزمرة (ح، +) مثال على زمرة غير منتهية وليست زمرة دائرية.

تمتاز الزمر الدائرية بخاصية قد لا توجد في الزمر الأخرى، المبرهنة التالية توضح هذه الخاصية.

مبرهنة: كل زمرة دائرية لابد أن تكون تبديلية.

البرهان:

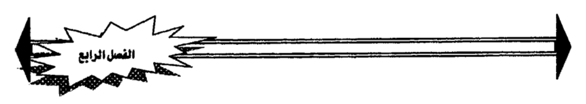
لنفرض أن ك زمرة دائرية مولدها العنصر أ. ك = <أ>

إذا كان ع، ل ∈ ك، فإن هناك عددين صحيحين، جـ، ر حيث أن ل = $أ^{ر}$ و ع = $أ^{جـ}$

الآن

$$ع\,ل = أ^{جـ}\,أ^{ر} = أ^{جـ+ر} = أ^{ر+جـ} = أ^{ر}\,أ^{جـ} = ل\,ع$$



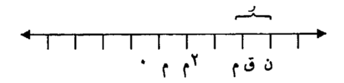


وهذا يعني أن ك زمرة تبديلية.

خوارزمية القسمة توضح أنه إذا كان م عدد صحيح موجب وأن ن عدد صحيح، فإن هناك عددين صحيحين وحيدين ر، ق حيث أن:

ن = م ق + ر ويكون ٠≤ر<م

يمكن تخيل ذلك على خط الأعداد كما يلي:



المبرهنة التالية توضح خاصية معينة بالزمر الجزئية من الزمر الدائرية.

مبرهنة: الزمرة الجزئية من زمرة دائرية لابد أن تكون دائرية.

البرهان:

لنفرض أن ك زمرة دائرية مولدها العنصر ا.

إذا كانت ل زمرة جزئية للزمرة الدائرية ك، فإنه إما أن تكون ل= {هـ} وهي زمرة جزئية دائرية أو أن ل≠{هـ}، وفي الحالة الأخيرة يكون هناك س≠ هـ حيث س = اⁿ في ل.

لنفرض أن العدد الصحيح الموجب م هو أصغر عدد صحيح موجب حيث اⁿ ∈ ل.

المطلوب برهنة أن ص = ا^م هو مولد ل بمعنى آخر

ل = <ص> = <ا^م> لنفرض أن ب ∈ ل



لكي نبرهن أن ل زمرة دائرية، لابد أن يكون ب على الشكل $أ^{ن}$.

الآن نستخدم خوارزمية القسمة

$$ن = م ق + ر \quad حيث \quad ٠ \leq ر < م$$

وبذلك يكون $أ^{ن} = أ^{مق+ر} = (أ^{م})^{ق} أ^{ر}$

وهذا يعني أن $أ^{ر} = (أ^{م})^{-ق} أ^{ن}$

وحيث أن ل زمرة جزئية، فإن $(أ^{م})^{-ق} أ^{ن} \in$ ل، وهذا يعني أن $أ^{ر} \in$ ل.

حيث أن م هو أصغر عدد صحيح موجب بشرط أن $أ^{م} \in$ ل، ومن خوارزمية القسمة $٠ \leq ر < م$، فإن ر=٠ بالضرورة. هذا يعني أن ن= ق م، أي أن ب= $أ^{ر} = (أ^{م})^{ق} = ص^{ق}$ وبذلك يكون ب على الشكل $ص^{ق}$.

نستنتج من ذلك أن ل زمرة جزئية دائرية.

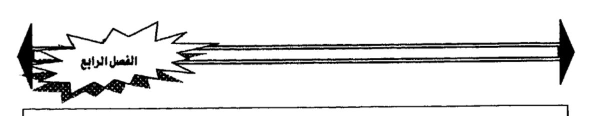
تعريف: لنفرض أن أ عنصر في الزمرة ك.

رتبة العنصر أ (order of) هو أصغر عدد صحيح موجب م حيث $أ^{م}$ = هـ ويرمز لذلك بالرمز (٠) (أ)= م. إذا لم يوجد مثل هذا العدد م، فإننا نقول بأن العنصر أ لأنها في الرتبة.

مبرهنة: إذا كان أ عنصر في الزمرة ك رتبته م، فإن:

١- $أ^{ن}$= هـ إذا وإذا كان فقط م/ ن.

٢- $أ^{ي} = أ^{ر}$ إذا وإذا كان فقط ي ≡ ر (mod م).



٣- العناصر هـ = $ا^{٠}$، $ا^{٢}$، ....، $ا^{م-١}$ كلها مختلفة.

٤- <ا>= {هـ، ا، $ا^{٢}$، ....، $ا^{م-١}$}.

٥- (٠) (ا) = (٠) (<ا>).

البرهان:

١- إذا كان $ا^{ن}$= هـ فاستخدام خوارزمية القسمة يمكننا من الحصول ن= ق م+ر حيث ٠≥ر<م إذن هـ= $ا^{ن}$= $ا^{ق م+ر}$ = $ا^{ق م}$ $ا^{ر}$

= $(ا^{م})^{ق}$ $ا^{ر}$ = $هـ^{ق}$ $ا^{ر}$= هـ $ا^{ر}$= $ا^{ر}$

وحيث أن ٠≥ر<م، والعدد م هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $ا^{م}$= هـ فإن ر = ٠.

هذا يعني أن ن= ق م ومنه نصل إلى م/ ن.

العكس

إذا كان م/ ن، فإن ن= م جـ حيث جـ عدد صحيح.

$ا^{ن}$= $ا^{م جـ}$ = $(ا^{م})^{جـ}$ = $هـ^{جـ}$ = هـ

٢- $ا^{ي}$ = $ا^{ر}$ يؤدي إلى أن $ا^{ي-ر}$ = هـ وهذا يعني من (١) أن م/ (ي-ر).

والذي يعني أن ي ≡ ر (mod م).

العكس

من الواضح أن ي ≡ ر (mod م) يعني أن م/ (ي-ر) ومن (١) هذا يؤدي إلى أن $ا^{ي-ر}$ = هـ ونحصل من ذلك على $ا^{ر}$ $ا^{ي-ر}$ = $ا^{ر}$ هـ والذي بدوره يعني أن $ا^{ي}$ = $ا^{ر}$.



٣- من (٢) نلاحظ أنه لا يوجد عددين من الأعداد ٠، ١، ٢، ... ، م-١.

يمكن أن يتطابقا مقياس م، وهذا يعني أن هـ، أ، أ^{٢}، ...، أ$^{م-١}$ كلها عناصر مختلفة.

٤- من الواضح أن <أ> = {هـ، أ، أ^{٢}، ...، أ$^{م-١}$} لأنه إذا كان أ^{ن} عنصر معطي، فإن هناك عدد صحيح ي يحقق ٠≤ي≤م-١ حيث أن ن≡ ي (mod م)، ولذلك فإن أ^{ن} = أ^{ي} وهذا يعني أن أ^{ن} هو أحد العناصر <أ> = {هـ، أ، أ^{٢}، ...، أ$^{م-١}$}.

٥- لاحظ أن المجموعة <أ> تحتوي على م من العناصر، وهذا يعني أن (٠) (<أ>) = (٠) (أ).

من المبرهنة السابقة نستطيع استنتاج أنه إذا كانت ك زمرة لانهائية رتبتها لانهائية، فإن: ك= <أ> = {أ^{ن}: ن∈ص}.

بحيث تكون كل القوى مختلفة، أما إذا كانت ك زمرة دائرية منتهية حيث (٠) (ك)= م فإن ك= <أ>= {هـ، أ، أ^{٢}، ...، أ$^{م-١}$} وتكون العناصر هـ، أ، أ^{٢}، ...، أ$^{م-١}$ كلها مختلفة.

إذا كانت ك زمرة منتهية، ليكن (٠) (ك)= ن، فإنه من مبرهنة لاجرانج نستنتج:

(٠) (<أ>)/ (٠) (ك)

ومن مبرهنة سابقة وصلنا إلى أن (٠) (أ) = (٠) (<أ>)

وهذا يعني أن (٠) (أ)/ (٠) (ك)

بمعنى آخر كل عنصر في زمرة منتهية له رتبة منتهية تكون قاسماً لرتبة الزمرة ك.

هذا النقاش يوصلنا إلى النتيجة التالية:

نتيجة (٣): إذا كانت ك زمرة منتهية وكان أ ∋ ك، فإن:
١- (٠)(أ) / (٠)(ك)
٢- $\text{أ}^{(\text{٠})(\text{ك})}$ = هـ

نستطيع الآن تصنيف الزمر الدائرية إلى:

١. زمر غير منتهية، بمعنى آخر تحتوي على عدد لانهائي من العناصر.

إذا كانت ك زمرة دائرية غير منتهية وكان أ ∋ ك، فإن هناك عددين صحيحين ي، ر حيث أن ي≠ر و $\text{أ}^{\text{ي}} \neq \text{أ}^{\text{ر}}$. لبرهنة ذلك نفرض أن

$\text{أ}^{\text{ي}} = \text{أ}^{\text{ر}}$ حيث ي≠ر، ليكن ي>ر.

$\text{أ}^{\text{ي}} = \text{أ}^{-\text{ر}} = \text{أ}^{\text{ي}-\text{ر}} = $ هـ

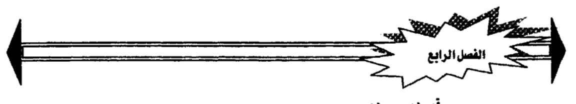
هذا يوضح أن هناك عدد موجب ل حيث أن $\text{أ}^{\text{ل}}$ = هـ.

لنفرض أن م هو أصغر عدد صحيح موجب حيث أن $\text{أ}^{\text{م}}$ = هـ.

إذا كان ذلك صحيحاً، فإننا نستطيع إيجاد عددين صحيحين ر، ق لأي عنصر $\text{أ}^{\text{ن}}$ ∋ ك

$\text{أ}^{\text{ن}}$ ∋ ك حيث أن ن= م ق+ر و ٠≤ر<م وبذلك فإن

$\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ق}+\text{ر}} = (\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ق}}\ \text{أ}^{\text{ر}}$



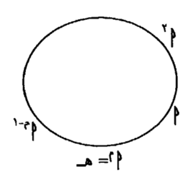
$= هـ^{ق} ٩^{ر} = ٩^{ر}$

أي أن $٩^{ن}$ هو أحد عناصر الزمرة الدائرية <٩>، وهـذا يعـني أن ك تحتـوي فقط على العناصر المختلفة هـ، ٩، $٩^{٢}$، ...، $٩^{ن-١}$، مما يناقض الفرض وهو أن ك زمرة غير منتهية.

إذن نصل إلى الاستنتاج وهو أن ي≠ر يؤدي إلى أن $٩^{ي} \neq ٩^{ر}$.

٢ - *زمر منتهية.*

إذا كانت ك زمرة دائرية منتهية، فإن ذلك يعني وجود أصـغر عـدد صـحيح موجب م حيث أن $٩^{م}$= هـ، وبذلك فإن ك تحتوي علـى هـــ، ٩، $٩^{٢}$، ...، $٩^{م-١}$ من العناصر المختلفة ويكون (٠) (ك)= م.

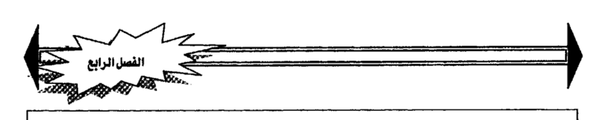


مثال (٩):

لنفرض أ، $ص_{م}$= {٠، ١، ٢، ...، م-١}

عملية الجمع مقياس م على هذه المجموعة تكون زمـرة منتهيـة رتبتهـا م. إذا كانت الزمرة دائرية منتهية، فإن المبرهنة التالية توضـح العناصـر المولـدة لزمرهـا الجزئية.





مبرهنة: لنفرض أن ك زمرة دائرية منتهية رتبتها ن.

إذا كان العنصر ۩ مولد الزمرة ك وكان ص ∋ ك حيث ص = ۩ر، فإن ص يولد زمرة جزئية دائرية من ك تحتوي على $\frac{ن}{د}$ من العناصر عندما يكون د= (ن، ر).

البرهان:

لقد وضحنا سابقاً بأن ص ∋ ك يولد زمرة جزئية ل من ك.

إذا كان صجـ = هـ فإن صجـ = (۩ر)جـ = ۩رجـ = هـ وهذا يوضح (حسب مبرهنة لاجرانج) أن ر جـ قاسم للعدد ن.

إذا كان د هو أكبر عدد يقسم كلاً من ر، ن، فإن $ن=د\left(\frac{ن}{د}\right)$، ومن ذلك نرى أن د يقسم العدد جـ، وأن $ر=\frac{ن}{د}$.

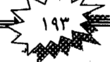
من هذه المبرهنة يمكن استنتاج النتيجة التالية:

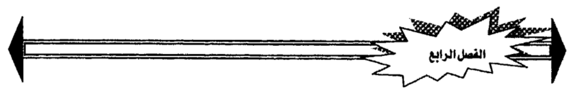
نتيجة (٤): الزمرة التي رتبتها ن (عندما يكون ن عدد أولي) زمرة دائرية.

ينتج ذلك من أن أي عنصر ≠۩هـ في الزمرة ك التي رتبتها ن له رتبة قاسم للعدد الأولي ن، ولهذا فإن (٠) (۩)= ن، هذا يعني أن الزمرة الجزئية ل أي تولد بواسطة العنصر ۩ تكون كل ك، أي أن ل = ك.

نتيجة (٥): الزمر الجزئية للزمرة الدائرية ك التي رتبتها عدد أولي ن هي {هـ}، ك نفسها.

من مبرهنة لاجرانج نجد أن (٠) (ل) لأي زمرة جزئية ل من ك هو عدد





قاسم للعدد الأولي ن، وحيث أن ن عدد أولي، فإن قواسمه هي ١، ن.

لقد عرفنا أنه إذا كانت ك زمرة رتبتها ن وأن ل زمرة جزئية من ك، فإن (٠) (ل)/ ن، ولكن هذا لا يعني أنه إذا كان العدد م قاسم للعدد ن (أي أن م/ ن) يؤدي إلى وجود زمرة جزئية من ك رتبتها م.

هذا صحيح في حالة الزمر الدائرية، أي أنه إذا كانت ك زمرة دائرية رتبتها ن، وإذا كان م/ ن، فإن هناك زمرة جزئية ل من ك رتبتها م. المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: لنفرض أن ك زمرة دائرية رتبتها ن. إذا كان م/ ن، فإن هناك زمرة جزئية ل من ك رتبتها م.

البرهان:

لنفرض أن ن=م ر وأن ص مولد الزمرة ك.

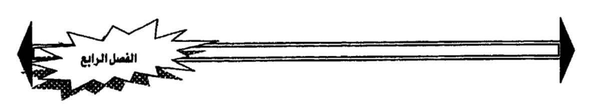
العناصر هـ، $ص^{ر}$، $ص^{٢ر}$، ....، $ص^{(م-١)ر}$ كلها مختلفة وتكون زمرة جزئية ل من ك.

من مبرهنة سابقة الزمرة الجزئية لزمرة دائرية لابد أن تكون دائرية.

النتيجة التالية توضح مولدات الزمرة الدائرية المنتهية والعلاقة التي تربط هذه المولدات.

نتيجة (٦): لنفرض أن ك زمرة دائرية منتهية رتبتها ن. إذا كان ص مولد ك، فإن مولدات ك الأخرى هي العناصر التي على الشكل $ص^{ر}$ حيث (ن، ر)= ١.





مثال (١٠):

المجموعة ص$_{١٢}$= {٠، ١، ٢، ٣، ... ، ١١} تحت عملية الجمع مقياس ١٢ زمرة دائرية منتهية مولدها العدد ١، وحيث أن (٣، ١٢)= ٣ فإن العدد ٣ يولد زمرة جزئية من ص$_{١٢}$ رتبتها $\frac{١٢}{٣}$=٤

<٣>= {٠، ٣، ٦، ٩}

كذلك (٤، ١٢)= ٤ من ذلك فإن العدد ٤ يولد زمرة جزئية من ص$_{١٢}$ رتبتها $\frac{١٢}{٤}$=٣

هي <٤>= {٠، ٤، ٨}

الآن (٢، ٥)=١

ولهذا فإن ٥ يولد الزمرة ص$_{١٢}$.

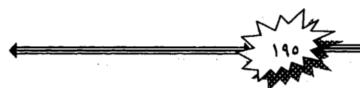
على هذا النحو نجد أن (٦، ١٢)= ٦ وبذلك فإن ٦ يولد زمرة جزئية من ص$_{١٢}$ رتبتها $\frac{١٢}{٦}$=٢ وهي {٠، ٦}.

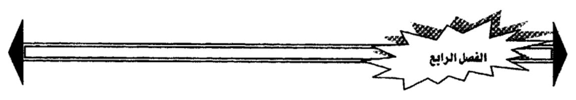
حيث أن (٧، ١٢)= ١، فإن ٧ يولد الزمرة ص$_{١٢}$.

تمارين

١- ضع علامة (صح) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (خطأ) أمام العبارة الخاطئة.

أ- كل زمرة تبديلية لابد أن تكون دائرية.





ب- كل عنصر في الزمرة الدائرية ك يولد الزمرة ك.

جـ- إذا كان ن عدد صحيح موجب، فإنه توجد على الأقل زمرة واحد تبديلية لها الرتبة ن.

٢- لنفرض أ، ك زمرة. إذا كان ∋ م ك حيث أن (٠) (م)= ن، فبرهن أن:

أ- (٠) ($م^{-١}$)= ن

ب- (٠) ($م^{جـ}$)= (٠) ($م^{ن-جـ}$) لأي عدد صحيح جـ.

٣- إذا كانت ك زمرة و م ∋ ك حيث $م^{١٥}$= هـ، فما هو (٠) (م)؟

٤- لنفرض أن ك زمرة وأن م، ب ∋ ك. برهن أنه إذا كان (٠) (م)= م و(٠) (ب)=ن وكان م ب= ب م فإن (٠) (م ب)= م ن عندما يكون (م، ن)= ١.

٥- إذا كانت ك زمرة و م ∋ ك حيث $م^{م}$= هـ، فبرهن أن (٠) (م)/ م.

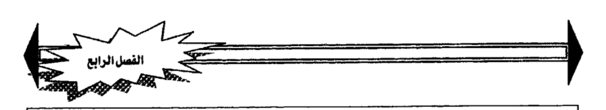
الزمر الجزئية الناظمية Normal Subgroups

لنفرض أن ل زمرة جزئية من الزمرة ك.

إذا كان م ∋ ك، فإن المجموعة المصاحبة اليمنى ل م قد لا تساوي المجموعة المصاحبة اليسرى م ل.

الزمر الجزئية التي مجموعاتها المصاحبة اليمنى تساوي مجموعاتها المصاحبة اليسرى لها أهمية خاصة في نظرية الزمر، لهذا السبب نركز الاهتمام على هذا الصنف من الزمر وتعطي أهم النتائج المتعلقة بتلك الزمر الجزئية.





تعريف: الزمرة الجزئية ن من الزمرة ك تسمى زمرة جزئية ناظمية (Normal) إذا كان ن ع=ع ن لكل ∋ع ك.

المبرهنة التالية توضح الشرط المكافئ للتعريف حتى تكون زمرة جزئية من زمرة ك زمرة جزئية ناظمية.

مبرهنة: ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك إذا وإذا كان فقط ع ن* $ع^{-1}$ ∋ ن لكل ∋ع ك و ن* ∋ ن.

البرهان:

إذا كان ن زمرة جزئية ناظمية من ك وكان ∋ع ك و ن* ∋ ن، فإن ع ن* $ع^{-1}$ ∋ ن لأن ن ك= ك ن.

الآن إذا كان ع ن* $ع^{-1}$ ∋ ن حيث ∋ع ك و ن* ∋ ن، فإن ع ن* ∋ ن ع لكل ∋ع ك و ن* ∋ ن وهذا يعني أن ن ع≥ع ن.

بما أن $ع^{-1}$ ∋ ك، فإن $ع^{-1}$ ع ن* ∋ ع ن وهذا يعني أن ن* ∋ ع ع ن، والذي بدوره يوضح أن ن ع≥ع ن.

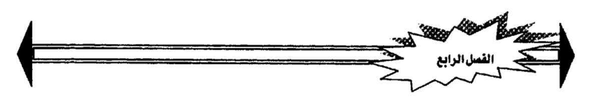
إذن ع ن = ن ع

وهذا يؤكد أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

إذا كانت ك زمرة تبديلية، فإن كل زمرها الجزئية تكون زمر جزئية ناظمية، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية لابد أن تكون ناظمية.





البرهان:

لنفرض أن ن زمرة جزئية من الزمرة التبديلية ك. لكل ∋ع ك و ن*∋ ن نجد أن

$ع ن^* ع^{-1} = ع ع^{-1} ن^* = هـ ن = ن$

وهذا يعني أن $ع ن^* ع^{-1}$ ∋ ن لكل ∋ع ك و ن*∋ ن وهذا يوصلنا إلى الاستنتاج وهو أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

المبرهنة السابقة لا تؤدي إلى الاستنتاج وهو:

إذا كانت الزمر الجزئية الفعلية لزمرة ك كلها ناظمية، فإن ك زمرة تبديلية.

هناك زمر غير تبديلية كل زمرها الجزئية الفعلية ناظمية.

مثال (١١):

المجموعة {±١، ±ي، ±ر، ±جـ} تحت عملية الضرب المعرفة عليها بحيث:

$ي^٢ = ر^٢ = جـ^٢ = ي ر جـ = -١$.

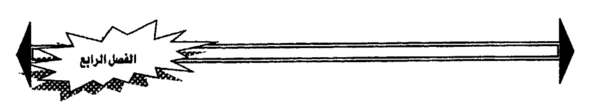
ي ر = جـ ، ر جـ = ي ، جـ ي = ر.

ر ي = − جـ ، جـ ر = −ي، ي جـ = −ر.

زمرة غير تبديلية (تسمى زمرة هاملتون).

إذا كانت ل زمرة جزئية فعلية من هذه الزمرة، فإن رتبة ل لابد أن تكون ٢ أو ٤.





على الطالب أن يوضح أنه إذا كانت (٠) (ل)= ٢ أو (٠) (ل) = ٤، فإن ل زمرة جزئية ناظمية.

دليل الزمرة الجزئية ن في ك له علاقة في الحكم على الزمرة الجزئية ن في كونها زمرة جزئية ناظمية، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: لنفرض أن ن زمرة جزئية من زمرة ك. إذا كان [ك: ن] = ٢، فإن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

البرهان:

لنفرض أن ٢ ∈ ك إذا كانت المجموعات المصاحبة اليمنى المختلفة للزمرة الجزئية ن في ك هي ن، ن٢، فإن ك=ن∪٢ن

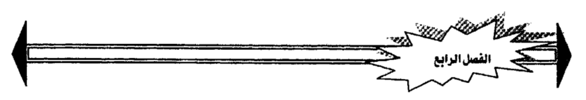
كذلك فإن المجموعات المصاحبة اليسرى المختلفة للزمرة الجزئية ن في ك هي:

ن، ٢ن، وبذلك فإن ك=ن∪٢ن

وهذا يؤكد أن ن٢ = ٢ن، والذي بدوره برهن أن ن زمرة جزئية ناظمية.

لقد وضحنا سابقاً بأن تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية من زمرة ك هو أيضاً زمرة جزئية من ك، والمبرهنة التالية تعطي نتائج تتعلق بتقاطع الزمر الجزئية الناظمية من ك.

مبرهنة: لنفرض أن $ن_1$، $ن_2$ زمرتين جزئيتين من زمرة ك. ١- إذا كان $ن_1$ زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن $ن_1 \cap ن_2$ زمرة جزئية ناظمية من $ن_2$. ٢- إذا كانت كل من $ن_1$، $ن_2$ ناظمية من ك، فإن $ن_1 \cap ن_2$ زمرة جزئية ناظمية من ك.



البرهان:

١- لنفرض أن $س \in (ن_1 \cap ن_2)$ وأن $ن^* \in ن_2$.

لاحظ أن $ن س ن^{-1} \in ن_1$ لأن $ن_1$ زمرة جزئية ناظمية من ك.

كذلك $ن س ن^{-1} \in ن_2$ ، لأن $ن^* \in ن_2$ و $س \in ن_2$ و $ن_2$ زمرة جزئية من ك.

هذا يعني أن $ن س ن^{-1} \in ن_1 \cap ن_2$ والذي مفاده أن $ن_1 \cap ن_2$ زمرة جزئية ناظمية من $ن_2$.

٢- لنفرض أن $س \in ن_1 \cap ن_2$.

نستطيع القول بأن $ع س ن^{-1} \in ن_1$ لأي عنصر $ع \in ك$ وذلك لأن $ن_1$ ناظمية في كل.

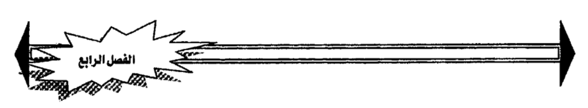
كذلك نستطيع القول بأن $ع س ن^{-1} \in ن_2$ لأي عنصر $ع \in ك$ لأن $ن_2$ ناظمية في ك.

هذا يعني أن $عَ س عَ^{-1} \in ن_1 \cap ن_2$ لكل $ع \in ك$ و $س \in ن_1 \cap ن_2$ والذي يعني أن $ن_1 \cap ن_2$ زمرة جزئية ناظمية في ك.

قد لا تكون الزمرة ك أي زمرة جزئية ناظمية عدا {هـ} و ك نفسها، وفي هذه الحالة تسمى ك بالزمرة البسيطة (Simple).

المبرهنة السابقة توضح أن التقاطع النهائي للزمر الجزئية الناظمية من ك هو زمرة جزئية ناظمية من ك، وفي الحقيقة نستطيع تعميم ذلك إلى أن تقاطع أي تجمع من الزمر الجزئية الناظمية من ك هو أيضاً زمرة جزئية ناظمية من ك.





إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من ك، وإذا كانت ل زمرة جزئية من ك بحيث أن:

ن ⊃ ل ⊃ ك

فإنه من السهل برهنة أن ن زمرة جزئية ناظمية من ل، ولكن إذا كان جـ١ ⊃ جـ٢ ⊃ ك حيث أن جـ١ زمرة جزئية ناظمية من جـ١ و جـ٢ زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن جـ١ زمرة جزئية من ك ليس من الضروري أن تكون ناظمية في ك، بمعنى آخر كون الزمرة الجزئية ناظمية ليست خاصية انتقالية.

تمارين

١- لنفرض أن $\{ل_\alpha\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة ك. برهن أن $\bigcap_\alpha ل_\alpha$ زمرة جزئية ناظمية من ك.

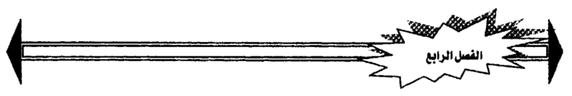
٢- لنفرض أن ل زمرة جزئية من الزمرة ك. إذا كانت ن(ل)- {ﺃ ∋ ك: ﺃلﺃ$^{-1}$ = ل} برهن ل زمرة جزئية ناظمية من ك إذا وإذا كان فقط ن(ل) = ك.

٣- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك وكانت جـ زمرة جزئية ناظمية من ك، فبرهن أن ل جـ= {ل* جـ: ل* ∋ ل، جـ* ∋ جـ}

زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك.

٤- لنفرض أن ك زمرة وأن ﺃ ∋ ك. مبادل (Commutator) العنصرين ﺃ، ب في ك هو [ﺃ، ب] = ﺃبﺃ$^{-1}$ب$^{-1}$، وضح أن:





١. ⍳ يتبادل مع ب إذا وإذا كان فقط [⍳، ب]= هـ.

٢. [⍳، ب]$^{-1}$ = [⍳، ب].

٥- لنفرض أن ل زمرة جزئية من زمرة ك. إذا كان ن=$\bigcap_{⍳\in ك}$ ⍳$^{-1}$ ل ⍳ برهن أن ن زمرة جزئية ناظمية من ك.

٦- إذا كانت ك كما في المثال (١١).

١. كون جدول للزمرة ك.

٢. برهن أن الزمرة الجزئية ل من ك حيث (٠) (ل)=٤ زمرة جزئية ناظمية من ك.

*** *زمر القسمة والتشاكل Quotient Group and Homomorphism***

إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فإن ك/ ن= {ع ن:ع∋ ك} تسمى مجموعة القسمة.

إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن كل مجموعة مصاحبة يمنى هو مجموعة مصاحبة يسرى، ولهذا السبب لا داعي لذكر يسرى أو يمنى في حالة كون ن زمرة جزئية ناظمية.

إذا عرفنا العملية * على ك/ ن حيث أن $ع_1$ن * $ع_2$ ن= ($ع_1$ * $ع_2$) ن فإن المجموعة ك/ ن تحت هذه العملية تكون زمرة.

بما أن هـ هو العنصر المحايد في الزمرة ك، فإن هـ ن = ن هو العنصر المحايد للمجموعة ك/ ن.



من الآن فصاعداً نسقط كتابة العملية * ونكتب $ع_1ن\ ع_2ن$ بدلاً من $ع_1ن * ع_2ن$. حتى تكون العملية معرفة تعريفاً جيداً يجب أن نبين أنه إذا كان:

$ل*ن = ل'*ن$ ، $عن = ع'ن$ حيث $ع، ع'، ل*، ل'*$ فإن $ع ل*ن = ع' ل'*ن$

$ع\ ل\ ن = ع\ (ل\ ن) = ع(ل'\ ن) = ع\ (ن\ ل')$

$= (ع\ ن)\ ل' = ع'\ ن\ ل' = ع'\ ل'\ ن$.

هذا يعني أن العملية معرفة تعريفاً جيداً.

لنفرض أن $ع_1ن، ع_2ن، ع_3ن \in ك/ن$

$(ع_1ن\ ع_2ن)\ ع_3ن = (ع_1ع_2)ن\ ع_3ن = [(ع_1ع_2)ع_3]ن$

$= ع_1ن\ (ع_2ع_3)ن = ع_1ن\ (ع_2ن\ ع_3ن)$

حيث أن $ع^{-1} \in ك$، فإنه إذا كان $عن \in ك/ن$، فإن $ع^{-1}ن \in ك/ن$ هذا يعني أن

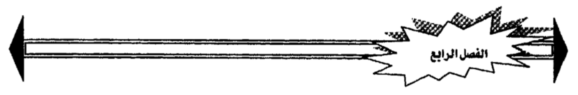
$ع\ ن\ ع^{-1}\ ن = (ع^{-1}\ ع)ن = هـ\ ن = ن$

وكذلك

$ع^{-1}\ ن\ ع\ ن = (ع^{-1}\ ع)\ ن = هـ\ ن = ن$

وهذا يعني أن $ع^{-1}ن$ هو نظير العنصر $ع\ ن$ في $ك/ن$.

هذا يوضح أن $ك/ن$ تحت العملية * تكون زمرة تسمى زمرة القسمة للزمرة ك على ن.



مثال (١٢):

مجموعة الأعداد الصحيحة ص تحت عملية الجمع زمرة تبديلية.

الزمرة الجزئية

٣ص= {٣س: س∈ص} زمرة جزئية ناظمية من ص

الآن ص/ ٣ص= {٠ + ٣ص، ١+٣ص، ٢+٣ص}

تكون زمرة القسمة للزمرة ص على ٣ص.

زمرة القسمة ك/ ن ذات أهمية عندما تكون ك زمرة منتهية، والمبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كانت ك زمرة منتهية وكانت ن زمرة جزئية ناظمية من ك، فإن $(\text{٠})(\text{ك}/\text{ن}) = \frac{(\text{٠})(\text{ك})}{(\text{٠})(\text{ن})}$

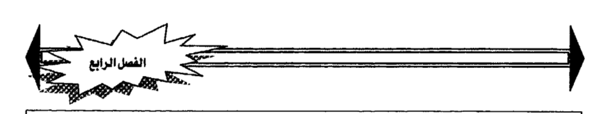
إذا كانت ك زمرة دائرية وكانت ن زمرة جزئية من ك، فإن الزمرة ك/ ن لابد أن تكون زمرة دائرية أيضاً، لأنه إذا كان أ مولد ك، فإن أن مولد الزمرة ك/ ن.

التشاكل الزمري Groups Homomorphism

الدالة التي تحافظ على البنية الجبرية ذات أهمية في الجبر وتمتاز بالكثير من الخواص الجيدة. في هذا الجزء ندرس الدالة التي تحافظ على العملية الثنائية المعرفة على زمرة ك بحيث تنقلها إلى نفس التأثير بالعملية الثنائية المعرفة على زمرة أخرى كَ.

هذه الدالة تسمى تشاكل (Homomor phism)، وحيث أنها تحافظ على العملية الثنائية المعرفة على الزمرة، فإنها تحافظ على تركيب الزمرة.



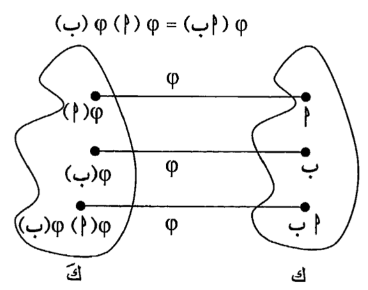


تعريف: الدالة φ من الزمرة ك إلى زمرة أخرى كَ. φ: ك ←كَ تسمى تشاكل من ك إلى كَ إذا كان φ (ٲ * ب)= φ (ٲ) □ φ (ب) لكل ٲ، ب ∋ ك.

لاحظ أن * العملية المعرفة على ك، والعملية □ معرفة على كَ.

من الآن فصاعداً نسقط العمليتين من الكتابة آخذين في الاعتبار بأن العملية بين عناصر ك هي العملية المعرفة على الزمرة كَ، ونكتب:

φ (ٲب) = φ (ٲ) φ (ب)



نعطي الآن بعض الأمثلة على التشاكل الزمري.

مثال (١٣):

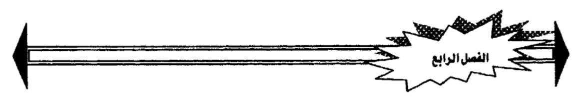
إذا كانت الدالة φ: ك ← كَ بين الزمرتين ك، كَ والمعرفة

φ (ٲ) = هـَ لكل ٲ ∋ ك.

حيث هـَ هو العنصر المحايد للزمرة كَ.

وضح أن φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ.





الحل:

φ (أب) = هـَ = هـَ هـَ = φ (أ) φ (ب) لأن أب ∈ ك لكل أ، ب ∈ ك هذا يوضح أن φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ.

مثال (١٤):

إذا كانت φ: ص ← ص حيث ص زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع.

تعرف الدالة φ كما يلي:

φ (س)= ٢س لكل س∈ ص وضح أن φ تشاكل.

الحل:

φ (س+ص) = ٢(س+ص) = ٢س + ٢ص = φ (س) + φ (ص).

وهذا يوضح أن φ تشاكل من ص إلى نفسها.

مثال (١٥):

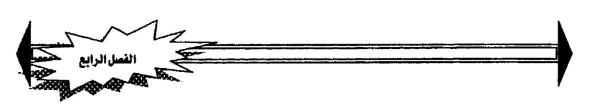
لنفرض أن ح⁺ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت عملية الضرب، وأن ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع.

إذا كانت φ: ح⁺←ح.

والمعرفة φ(س)= لوهـ س لكل س∈ ح⁺.

وضح أن φ تشاكل من الزمرة (ح⁺، ·) إلى الزمرة (ح، +).





الحل:

φ(س،ص)= لو$_{هـ}$ (س ص)= لو$_{هـ}$ س+ لو$_{هـ}$ ص= φ(س)+ φ(ص)

وهذا يعني أن φ تشاكل من ($ح^+$، ·) إلى الزمرة (ح، +).

مثال (١٦):

إذا كانت $م_{٢×٢} = \left\{ \begin{bmatrix} ٲ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} : ٲد - ب جـ \neq ٠ \right\}$

فإن $م_{٢×٢}$ تحت عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة، وإذا كانت ح* مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر فإن ح* تحت عملية الضرب تكون زمرة. إذا كانت

φ: $م_{٢×٢}$ ← ح* معرفة كما يلي: $\varphi\left(\begin{bmatrix} ٲ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}\right) = ٲد - ب جـ$

من الواضح أنه إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٲ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$، فإن العدد ٲد- ب جـ هو محددة المصفوفة أ، وبالتالي نستطيع القول بأن φ دالة من مجموعة المصفوفات أ من نوع ٢×٢ والتي محددتها لا تساوي صفر إلى محددتها.

لنفرض أن أ، ب $\in$ $م_{٢×٢}$ حيث |أ|$\neq$٠ وبذلك تكون φ(أ)= |أ|

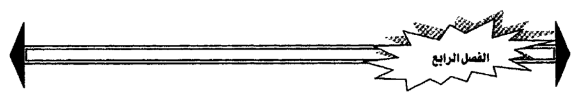
الآن

φ (أب)= |أب| = |أ| |ب| (من خواص المحددة)

= φ (أ) φ (ب)

وهذا يوضح أن φ تشاكل من $م_{٢×٢}$ إلى ح*.





مثال (١٧):

إذا كانت (ح، +) زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع، وكانت (ح⁺، ٠) زمرة كل الأعداد الحقيقية عدا الصفر تحت عملية الضرب.

نعرف الدالة φ: ح ← ح* بالصيغة φ(س)= ٢^س لكل س∈ح.

وضح أن φ تشاكل من ح إلى ح*.

الحل:

φ (س+ص)= ٢^(س+ص) = ٢^س ٢^ص = φ (س) φ(ص)

وهذا يوضح أن φ تشاكل من ح إلى ح*.

إذا كانت φ تشاكل من الزمرة ك إلى نفسها، فإنها تسمى تشاكل داخلي (endomorphism) من الأمثلة العديدة التي يمكن اشتقاقها للحصول على تشاكل رمزي تنتج من المبرهنة التالية:

مبرهنة: لنفرض أن ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك. الدالة φ: ك ← ك/ ن. والمعرفة φ(ع)= ع‌ن لكل ∋ع‌ح تعطي تشاكل فوقي يسمى التشاكل الطبيعي.

البرهان:

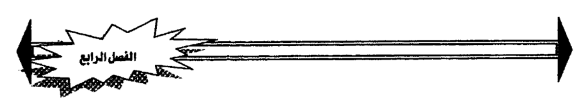
الدالة φ دالة فوقية ناتج من أنه لكل ع ن ∋ ك/ ن هناك ∋ع‌ك حيث φ(ع)= ع ن الآن.

φ(ع١ ع٢)= (ع١ع٢)ن= [(ع١ن) (ع٢ ن)

= φ (ع١) φ (ع٢)   لكل ع١، ع٢ ∋ك.

وهذا يوضح أن φ تشاكل فوقي من ك إلى ك/ ن





التشاكل الزمري يحافظ على العنصر المحايد وكذلك يحافظ على نظير العنصر، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة: إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن: ١- φ(هـ)= هـَ العنصر المحايد في ك و هـَ العنصر المحايد في كَ. ٢- φ (ع$^{-1}$) = (φ(ع))$^{-1}$.

البرهان:

١- لنفرض أن ع∈ك ⟸ φ(ع) هـَ= φ (ع)= φ (ع هـ) = φ(ع) φ (هـ)

ومن قانون الاختصار نصل إلى أن φ (هـ) = هـَ.

٢- φ (ع) φ (ع$^{-1}$) = φ (ع ع$^{-1}$) = φ (هـ)= هـَ.

وكذلك

φ (ع$^{-1}$) φ (ع)= φ (ع$^{-1}$ع) = φ (هـ)= هـَ.

وهذا يعني أن:

φ (ع$^{-1}$) هو نظير العنصر φ(ع)، أي أن φ (ع$^{-1}$) = (φ(ع))$^{-1}$.

تأثير التشاكل على الزمر الجزئية للزمرة ك، وكذلك تأثير التشاكل على الزمر الجزئية للزمرة كَ يدرس في المبرهنة التالية.

مبرهنة: إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن: ١- φ (ل) زمرة جزئية من كَ لكل زمرة جزئية ل من ك. ٢- φ^{-1} (جـ) زمرة جزئية من ك لكل زمرة جزئية جـ من كَ.



البرهان:

١- من المعلوم أن φ(ل)= {φ(ل*): ل* ∈ل}

لنفرض أن φ(ل١*) ، φ(ل٢*)∈φ(ل)

هذا يعني أن ل١* ، ل٢* ∈ل وبذلك يكون ل١* ل٢*⁻¹ ∈ل لأن ل زمرة جزئية من ك.

الآن

φ(ل١*)(φ(ل٢*))⁻¹ = φ(ل١*)φ(ل٢*⁻¹)= φ(ل١* ل٢*⁻¹)∈φ(ل)

إذن φ(ل) زمرة جزئية من كَ.

٢- من المعلوم أن φ^{-1}(جـ) = {ع∈ك: φ(ع)∈جـ}

الآن

إذا كان ع١، ع٢ ∈ φ^{-1}(جـ)، فإن φ(ع١)، φ(ع٢)∈جـ

وحيث أن جـ زمرة جزئية من كَ، فإن:

φ(ع١) φ(ع٢)⁻¹ ∈جـ

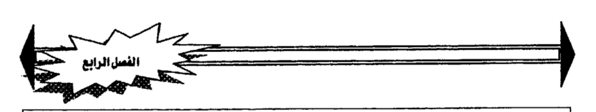
ولكن φ(ع١)φ(ع٢)⁻¹=φ(ع١)φ(ع٢⁻¹)

=φ(ع١ع٢⁻¹)

وهذا يعني أن ع١ع٢⁻¹ ∈φ^{-1}(جـ) وبالتالي φ^{-1} (جـ) زمرة جزئية من ك.

السؤال الآن هو: ماذا يحصل لو وضعنا في المبرهنة السابقة جملة 'زمرة جزئية ناظمية' مكان الجملة 'زمرة جزئية'؟

الإجابة على هذا السؤال في النتيجة التالية.



نتيجة (١): إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن:

١- φ (ل) زمرة جزئية ناظمية من كَ لكل زمرة جزئية ناظمية ل من ك عندما يكون φ تشاكل فوقي.

٢- φ^{-1} (جـ) زمرة جزئية ناظمية من ك لكل زمرة جزئية ناظمية جـ من كَ.

إذا كان φ: ك ← كَ تشاكل رمزي، فإن هناك مجموعة جزئية من ك ذات أهمية تحت تأثير التشاكل φ، وهذه المجموعة تسمى نواة التشاكل.

تعريف: إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن مجموعة العناصر في ك والتي تعطى تحت تأثير الشكل φ العنصر المحايد في كَ تسمى نواة التشاكل (Kernal of)، ويرمز لها بالرمز نواة (φ).

نواة (φ)= {س∈ك: φ(س)= هـَ}

من الملاحظ أن نواة (φ) مجموعة غير خالية لأي تشاكل φ لأنها تحتوي على الأقل على العنصر المحايد هـ في ك.

تطبيق النتيجة السابقة على نواة (φ) يمكن أن يوصلنا إلى أن نواة (φ) زمرة جزئية ناظمية من ك، لأن:

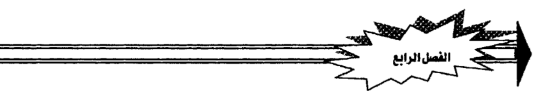
نواة (φ)= φ^{-1} ({هـ})

ويمكن توضيح ذلك بطريقة أخرى وهي:

إذا كان جـ ∈ نواة (φ) ، ع∈ك فإن:

φ (ع جـ $ع^{-1}$) = φ (ع) φ(جـ) φ($ع^{-1}$)





$$= \varphi(ع)\ هـَ\ \varphi(ع^{-1}) = \varphi(ع)\ \varphi(ع)^{-1} = هـَ$$

إذن عجـ $ع^{-1}$ ∋ نواة (φ) وهذا يبرهن أن نواة (φ) زمرة جزئية ناظمية من ك.

> نتيجة (٢): إذا كان φ تشاكل من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن نواة (φ) زمرة جزئية نظامية من ك.

نواة التشاكل تستخدم في الحكم على أن التشاكل أحادي أو غير أحادي، والمبرهنة التالية توضح ذلك.

> مبرهنة: إذا كان φ تشاكل زمري، فإن φ تشاكل أحادي إذا وإذا كان فقط نواة (φ) = {هـ}

البرهان:

إذا كان φ تشاكل أحادي وكان ﻫ ∋ نواة (φ)، فإن φ(ﻫ)= هـَ ولكن φ(هـ)= هـَ وهذا يعني أن φ(هـ)= φ(ﻫ) والذي بدوره يؤدي إلى أن ﻫ= هـ، وبذلك يكون الاستنتاج نواة (φ)= {هـ} قد حصل. الآن لنفرض أن نواة (φ)= {هـ}.

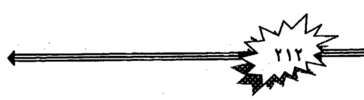
إذا كان:

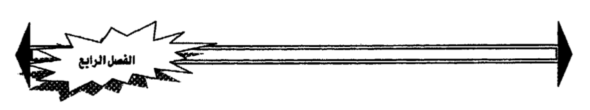
$\varphi(ع_1) = \varphi(ع_2)$ فإن $\varphi(ع_1 ع_2^{-1}) = \varphi(ع_1)\varphi(ع_2^{-1})$

$\varphi(ع_1)\varphi(ع_2)^{-1} = هَ$

وهذا يعني أن $ع_1 ع_2^{-1}$ ∋ نواة (φ) إذن $ع_1 ع_2^{-1}$= هـ لأن نواة (φ)= {هـ}

وهذا يعني أن $ع_1 = ع_2$، وبالتالي فإن التشاكل φ أحادي.





عرفنا في السابق أن نواة التشاكل زمرة جزئية ناظمية، وفي الحقيقة نستطيع قول أكثر من ذلك، وهو أن أي زمرة جزئية ناظمية هي نواة تشاكل زمري، بمعنى آخر إذا كانت ن زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فإنه يمكن تعريف تشاكل فوقي φ: ك ⟵ ك/ ن

بحيث تكون نواته الزمرة الجزئية الناظمية ن. واضح أن φ: ك ⟵ ك/ ن

φ(ع)=عن يعرف تشاكل فوقي.

الآن لنفرض أن ع ∋ نواة (φ).

هذا يعني أن φ(ع)= ع ن = ن، ومن ذلك نستطيع القول بأن ∋عن، ومن ذلك نصل إلى نواة (φ)∋ن، والرجوع في نفس الطريق برهن أن ن ∋ نواة (φ) والذي بدوره يوصلنا إلى أن نواة (φ)= ن.

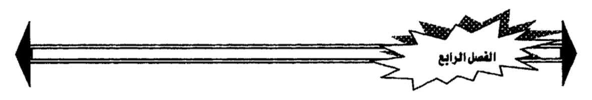
عندما يكون التشاكل الزمري φ: ك ← كَ أحادي، فإنه يمكن النظر إلى ك، φ(ك) بأنهما ذات تركيب جبري واحد، ولهذا السبب نعطي تعريف خاص للتشاكل الأحادي.

تعريف: إذا كان φ تشاكل زمري من الزمرة ك إلى الزمرة كَ، فإن φ: ك ← كَ يسمى تشاكل تقابلي (Isomor phism) إذا كانت φ دالة أحادية.

إذا كان هناك تشاكل تقابلي فوق φ من ك إلى كَ، فإن الزمرتان ك، كَ متشاكلتين تقابلياً ويرمز لذلك ك ≈ كَ.

عرفنا من مبرهنة سابقة بأن التشاكل φ من الزمرة ك إلى الزمرة كَ يكون تشاكل تشاكل تقابلي إذا وإذا كان فقط نواة (φ)= {هـ}.





المبرهنة التالية توضح العلاقة بين نواة التشاكل الفوقي وزمرة القسمة والتي تسمى النظرية الأساسية للتشاكل.

نظرية: (النظرية الأساسية للتشاكل)

إذا كانت ك، كَ زمرتان وكان φ: ك ← كَ.

تشاكل فوقي نواته جـ ، فإن الزمرتان ك/ جـ، كَ متشاكلتان تقابلياً، أي أن ك/ج = كَ

البرهان:

وضحنا فيما سبق أن ψ: ك ← ك/ جـ تشاكل فوقي،

وأطلقنا عليه اسم التشاكل الطبيعي.

الآن نعرف دالة ق من الزمرة ك/ جـ إلى الزمرة كَ

وذلك كما يلي: لكل ع جـ ∋ ك/ جـ، فإن ق(ع جـ)= φ(ع)

أولاً نوضح أن ق معرفة تعريفاً جيداً.

إذا كان ع جـ = عَ جـَ حيث ع، عَ ∋ ك، فإن ق(ع جـ) = ق(عَ جـَ)، وهذا يعني أن φ(ع) = φ(عَ) إذن الدالة ق معرفة تعريفاً جيداً.

لنبرهن الآن أن ق دالة فوقية، نفرض أن عَ ∋ كَ.

إذن هناك ع ∋ ك حيث φ(ع)= عَ لأن φ دالة فوقية، وهذا يعني أن:



ع = φ(ع) = ق(ع جـ)

إذن لكل ع $\in$ كَ هناك ع جـ $\in$ ك/ جـ حيث ق(ع جـ) = ع

علينا الآن أن نبرهن أن ق تشاكل.

ق(ع$_1$ جـ ع$_2$ جـ)= ق((ع$_1$ع$_2$) جـ) = φ (ع$_1$ع$_2$)= φ(ع$_1$) φ(ع$_2$)

= ق(ع$_1$ جـ) φ(ع$_2$جـ)

وهذا يعني أن ق تشاكل. لتكملة البرهان بقي علينا أن نبرهن أن ق دالة أحادية.

لنفرض أن ع جـ $\in$ نواة (ق).

هذا يعني أن ق(ع جـ)= هـَ ولكن ق(ع جـ)= φ(ع)، ومن ذلك نصل إلى أن φ(ع)= هـَ وهذا يعني أن ع $\in$ نواة (φ) = جـ.

هذا الاستنتاج يعني أن ع جـ= جـ.

والذي مفاده أن نواة (ق)= جـ وهو العنصر المحايد في ك/ جـ إذن ق دالة أحادية.

وضع كل هذه الأجزاء معاً يوصلنا إلى اكتمال برهان ن ق تشاكل تقابلي فوقي من ك/ جـ إلى كَ، أي أن ك/ جـ $\approx$ كَ.

ملاحظة: إذا كان التشاكل φ: ك $\leftarrow$ كَ غير فوقي، فإن ك/ جـ $\approx$ تقابل ك.

مثال (١٨):

لنفرض أن φ: (ص، +) $\longleftarrow$ ({١، -١}، ٠)



حيث أن:

φ(ن)= $\begin{cases} 1 & \text{،ن عدد زوجي} \\ -1 & \text{،ن عدد فردي} \end{cases}$ وضح أن φ تشاكل فوقي.

لنفرض أن ع$_2$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، وأن ص$_1$ مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية من الواضح أن:

نواة (φ)= ص$_2$ الآن ص/ نواة (φ)= ص/ ص$_2$= {ص$_1$، ص$_2$}.

إذن {ص$_1$، ص$_2$}= {1، -1}

وذلك من المبرهنة السابقة التي تضمن هذا التشاكل التقابلي الفوقي.

يمكن تعريف هذا التشاكل كما يلي:

ق(ص$_2$) = ق(0+ص$_2$) φ (0) = 1

ق(ص$_1$) = ق(1+ص$_2$) = φ (1) = -1

مثال (19):

لنفرض أن ك زمرة وأن أ ∋ ك.

الدالة φ: ص ← <أ> والمعرفة φ (ن)= أ^{ن}

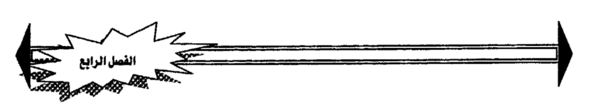
تشاكل فوقي من الزمرة ص تحت عملية الجمع إلى الزمرة الجزئية الدائرية <أ> من ك.

نستطيع استنتاج أن ص/ نواة (φ)= <أ>.

هناك احتمالات يمكن دراستها:

1- إذا كان نواة (φ)= {0} هذا يعني أن {ن∋ص: أ^{ن}= هـ} = {0}





وبذلك يكون للعنصر أ رتبة لانهائية وتكون ص/ نواة (φ) هي الزمرة ص.

هذا يوصلنا إلى استنتاج أن أي زمرة دائرية لا نهائية هي في الحقيقة الزمرة ص تحت عملية الجمع.

٢- نواة (φ) $\neq$ {٠}. هذا يعني أن هناك أصغر عدد صحيح موجب حيث أن أ^{ن}= هـ، وبذلك يكون نواة (أ) = <ن>.

هذا يعني أن ص$_{ن}$= ص/ نواة (φ) ويكون الاستنتاج هو أن أي زمرة دائرية منتهية هي في حقيقتها ص$_{ن}$ حيث ن رتبة مولد الزمرة الدائرية <أ>.

هذه النتيجة تقودنا إلى أن أي زمرتان دائريتان لهما نفس الرتبة متشاكلتان تقابلياً.

إذا كان φ: ك $\leftarrow$ ك تشاكل زمري داخلي وإضافة إلى ذلك يكون φ تشاكل تقابلي فوقي، فإنه يسمى في هذه الحالة تشاكل تقابلي ذاتي (automorphism).

لنفرض أن ك زمرة وأن ∈ أك.

الدالة $\varphi$$_{أ}$: ك $\leftarrow$ ك والمعرفة $\varphi$$_{أ}$(س)= أس أ$^{-1}$ لكل س∈ك تعتبر تشاكل داخلي.

إذا كان س$_{١}$، س$_{٢}$ ∈ ك، فإن:

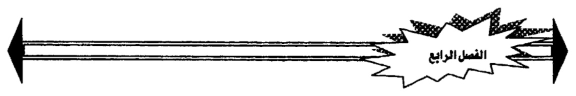
$\varphi$$_{أ}$(س$_{١}$، س$_{٢}$)= أ(س$_{١}$ س$_{٢}$) أ$^{-1}$

= أ(س$_{١}$أ$^{-1}$ أس$_{٢}$) أ$^{-1}$

= أ(س$_{١}$أ$^{-1}$) (أس$_{٢}$أ$^{-1}$) = $\varphi$$_{أ}$ (س$_{١}$) $\varphi$$_{أ}$(س$_{٢}$)

لاحظ أن $\varphi$$_{أ}$ دالة فوقية لأنه لكل س∈ك.





هناك $أ^{-1}$س أ ∋ ك حيث أن $\varphi_{أ}$($أ^{-1}$س أ) = س.

إذا كان $\varphi_{أ}$(س$_1$)= $\varphi_{أ}$(س$_2$)، فإن أس$_1$$أ^{-1}$ = أس$_2$ $أ^{-1}$ ومن قانون الاختصار نصل إلى أن س$_1$= س$_2$، وهذا يعني أن $\varphi_{أ}$ دالة أحادية.

مثل هذا التشاكل (تشاكل تقابلي فوقي داخلي يسمى تشاكل تقابلي ذاتي داخلي) (inner automorphism).

يرمز لمجموعة التشاكلات التقابلية الذاتية الداخلية للزمرة ك بالرمز داخلي (ك)، أي أن:

داخلي (ك)= {$\varphi_{أ}$: أ ∋ك}

إذا كانت ك زمرة تبديلية، فإن داخلي (ك) تحتوي على التشاكل المحايد ل: ك ← ك حيث ل(س)= س لكل س ∋ ك.

إذا عرفنا على داخلي (ك) عملية تركيب الدوال فإن (داخلي (ك)، ∋ ○) تصبح زمرة.

إذا كان $\varphi_{أ}$، $\varphi_{ب}$ ∋ داخلي (ك) فإن:

($\varphi_{أ}$ ○ $\varphi_{ب}$) س= $\varphi_{أ}$ ($\varphi_{ب}$ (س)) = $\varphi_{أ}$ (ب س $ب^{-1}$)

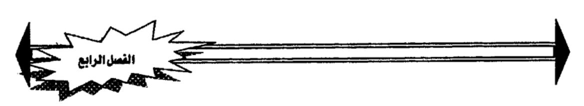
= أب س $ب^{-1}$ $أ^{-1}$ = (أب) س$(أب)^{-1}$ = $\varphi_{أب}$(س)

وهذا يعني أن $\varphi_{أ}$ ○ $\varphi_{ب}$= $\varphi_{أب}$، وبذلك تكون المجموعة داخل (ك) مغلقة تحت العملية ○.

إذا كان هـ هو العنصر المحايد في ك، فإن $\varphi_{هـ}$ (س)= هـ س $هـ^{-1}$= س

ومن ذلك نجد أن ($\varphi_{هـ}$ ○ $\varphi_{أ}$)س= $\varphi_{أ}$(س)





و $(\varphi_{هـ} \circ \varphi_{أ})$س $= \varphi_{هـ}$ (أس أ$^{-1}$) $=$ أس أ$^{-1}$ $= \varphi_{أ}$(س)

هذا يعني أن $\varphi_{هـ}$ هو العنصر المحايد للمجموعة داخل (ك) تحت العملية $\circ$.

إذا كان أ $\in$ ك، فإن:

$$(\varphi_{أ^{-1}} \circ \varphi_{أ})س = (\varphi_{أ^{-1}} \circ \varphi_{أ})س$$

$$= أ^{-1}\ أس\ أ^{-1}\ (أ^{-1})^{-1} = س = \varphi_{هـ}(س)$$

كذلك:

$(\varphi_{أ} \circ \varphi_{أ^{-1}})$س$= \varphi_{أ}$ (أ$^{-1}$س أ) $=$ أ أ$^{-1}$ س أ أ$^{-1}$ $=$ س $= \varphi_{هـ}$(س)

وهذا يعني أن $\varphi_{أ}^{-1} = \varphi_{أ^{-1}}$.

من هذا كله نصل إلى أن (داخل (ك)، $\circ$) زمرة.

بصفة عامة، فإن مجموعة التشاكلات التقابلية الذاتية على الزمرة ك، والتي يرمز لها بالرمز ذاتية (ك) تحت عملية الدوال تكون زمرة.

لاحظ أن داخل (ك) زمرة جزئية من الزمرة ذاتية (ك)، وإضافة إلى ذلك فإن داخل (ك) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ذاتية (ك).

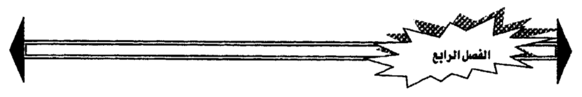
كون داخل (ك) زمرة جزئية من ذاتية (ك) قد تم برهنته.

الآن لنفرض أن $\Psi \in$ ذاتية (ك) وأن $\varphi_{أ} \in$ داخل (ك)، ولنفرض أن س$\in$ك.

$(\Psi \circ \varphi_{أ} \circ \Psi^{-1})$س$= \Psi\ (\varphi_{أ}\ (\Psi^{-1}$ (س)$)) = \Psi$ (أ Ψ^{-1} (س) أ$^{-1}$)

$$= \Psi(أ)\ \Psi(\Psi^{-1}(س))\ \Psi(أ^{-1})$$





$$= \Psi(\text{م})\,\text{س}\,\Psi(\text{م}^{-1}) = \varphi_{\Psi(\text{م})}(\text{س})$$

إذن:

$\Psi \circ \varphi_{\text{م}} \circ \Psi^{-1} \in$ داخل (ك)

وهذا برهان أن داخل (ك) زمرة جزئية ناظمية من ذاتية (ك).

تعرفنا أن أ (س) وهي مجموعة الدوال الأحادية والفوقية من س إلى نفسها، وعرفنا على أ(س) عملية تركيب الدوال ○، ومن ذلك نستنتج أن (أ(س)، ○) زمرة.

إذا كانت ك زمرة، فيمكن تعريف

$\text{ل}_{\text{م}}$: ك ← ك حيث $\text{ل}_{\text{م}}$(س)= م(س) لكل س ∈ ك.

لاحظ أن $\text{ل}_{\text{م}}$ دالة أحادية وفوقية من ك إلى نفسها.

عن طريق مثل هذه الدوال نستطيع تعريف φ: ك ← أ (ك)

بحيث أن φ(م) = $\text{أ}_{\text{م}}$ لكل م ∈ ك.

لاحظ أن:

$$(\text{أ}_{\text{م}} \circ \text{أ}_{\text{ب}})\,\text{س} = \text{أ}_{\text{م}}\,(\text{أ}_{\text{ب}}(\text{س})) = \text{أ}_{\text{م}}(\text{ب س})$$

$$= (\text{م ب})\,\text{س} = \text{أ}_{\text{مب}}(\text{س}) \text{ لكل س} \in \text{ك}$$

هذا يعني أن $\text{ل}_{\text{م}} \circ \text{ل}_{\text{ب}} = \text{ل}_{\text{مب}}$.

الآن نبرهن أن φ تشاكل تقابلي φ (م ب)= $\text{ل}_{\text{مب}}$= $\text{ل}_{\text{م}} \circ \text{ل}_{\text{ب}}$= φ(م) ○ φ(ب)



وهذا يعني أن φ تشاكل من ك إلى أ(ك).

الآن إذا كان φ(م)= φ(ب) فإن ذلك يعني أن لم= لب

ولكن م= لم(هـ)= لب(هـ)= ب

وهذا يوضح أن φ دالة أحادية. هذا النقاش يوصلنا إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة: (نظرية كيلي) كل زمرة ك متشاكلة تقابلياً مع زمرة جزئية من أ (س) لمجموعة مناسبة س.

في النقاش السابق للمبرهنة لا نستطيع مبرهنة أن φ تشاكل فوقي لأنه إذا كانت ك زمرة منتهية عدد عناصرها ن حيث ن>٢، فإن عدد عناصرها أ(ك) يساوي ن! وتعرف جيداً أن ن!>ن.

إذا كانت ك زمرة منتهية برتبة ن، فإنها تكون متشاكلة مع زمرة جزئية من سن لمجموعة مناسبة س، وهذه نتيجة واضحة من مبرهنة كيلي.

تمارين

١- لنفرض أن ل زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية ك.

برهن أن (٠)(م ل) حيث م ل في ك/ ل قاسم لرتبة العنصر م حيث ∋ م ك.

٢- لنفرض أن ك زمرة. برهن أن ك زمرة تبديلية إذا وإذا كانت فقط الدالة φ: ك ← ك والمعرفة φ(م)= م$^{-1}$ تشاكل فوقي.

٣- إذا كانت ك زمرة، وكان φ: ك ← ك تشاكل، فبرهن أن:

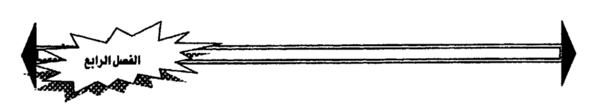
ل= {م ∋ ك: φ(م)= م} زمرة جزئية من ك.

٤- لنفرض أن ص٨ زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس ٨،
وأن ك= <أ> زمرة دائرية رتبتها ١٢. برهن أن الدالة:

φ: ص٨ ← ك، والمعرفة φ(ن)= $ن^{٣ن}$ تشاكل وحدد نواة (φ)

٥- إذا كانت φ: ك ← كَ تشاكل فوقي، وكانت ك زمرة بسيطة، فبرهن أن:

ك ≈ كَ أو أن φ(أ)= هـَ لكل أ ∈ ك.



تمارين عامة

١- لنفرض أن ك زمرة. برهن أن ك زمرة تبديلية إذا وإذا كان فقط $(اب)^٢$ = $ا^٢ب^٢$ لكل ا، ب ∋ ك.

٢- لنفرض أن ك زمر منتهية. برهن أن إذا كان (٠) (ك) عدد زوجي، فإن ك تحتوي على عنصر ا ≠ هـ حيث $ا^٢$ = هـ.

٣- إذا كان $ص_{١٦}$ زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس ١٦، فبرهن أن ل= {٠، ٤، ٨، ١٢} زمرة جزئية من ك.

٤- إذا كان ل زمرة جزئية من زمرة ك، وع زمرة جزئية من ل، فبرهن أن ع زمرة جزئية من ك.

٥- لنفرض أن ل زمرة جزئية من زمرة تبديلية ك.

برهن أن ن= {س ∋ ك: $س^ن$ ∋ ل، ن ∋ ص} زمرة جزئية من ك.

٦- لنفرض أن ل ≠ Φ مجموعة جزئية من زمرة ك. إذا كانت ل مغلقة تحت عملية الزمرة ك، وكل عنصر في ل له رتبة نهائية، فبرهن أن ل زمرة جزئية من ك.

٧- لنفرض أن ك زمرة تبديلية، وأن ن عدد صحيح ثابت

برهن أن:

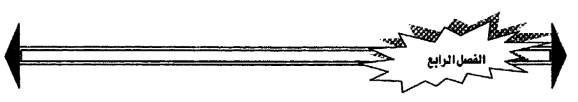
$ل_ا$= {ا ∋ ك: (٠) (ا)/ ن}زمرة جزئية من ك.

٨- لنفرض أن ل زمرة جزئية عن زمرة ك. إذا كانت

ن(ل)= {ا ∋ ك: ال$ا^{-١}$= ل} فبرهن أن

ل زمرة ناظمية من ك إذا وإذا كان فقط ن(ل) = ك.





٩- لنفرض أن ك= <أ> زمرة دائرية رتبتها ١٥، وأن
ل= <أ^{٣}> كون جدول للزمرة ك/ ل.

١٠- إذا كانت ل زمرة جزئية ناظمية من الزمرة ك، فبرهن أن ك/ ل زمرة تبديلية إذا كانت ك تبديلية.

١١- إذا كانت ل زمرة جزئية ناظمية من زمرة دائرية ك، فبرهن أن ك/ ل زمرة دائرية.

١٢- لنفرض أن ك زمرة وأن φ: ك ← ك دالة فوقية حيث φ(أ)= أ$^{-١}$
برهن أن:
φ تشاكل تقابلي ذاتي إذا وإذا كانت فقط ك زمرة تبديلية.

١٣- لنفرض أن ك، كَ زمرتان، وأن φ: ك ← كَ تشاكل فوقي.
تحقق من الجمل التالية:
أ- إذا كانت ل،ع زمرتان جزئيتان من ك بحيث أن نواة $(\varphi) \supseteq$ ل$\cap$ع، فإن
φ(ل$\cap$ع)= φ(ل) $\cap$ φ(ع)
ب- إذا كانت ل زمرة جزئية من ك، فإن:
ق$^{-١}$(φ(ل))= ل(نواة (φ))

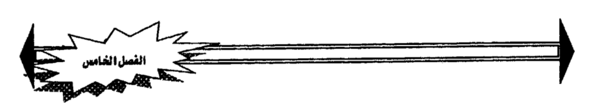
١٤- إذا كانت φ: ك ← ص$_{٨}$ تشاكل فوقي من الزمرة ك إلى زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع مقياس ٨، فبرهن أن ك لها زمرة جزئية ناظمية ن حيث أن [ك: ن]= ٢.

١٥- لنفرض أن ل،ع زمرتان جزئيتان ناظميتان من زمرة ك بحيث أن
ل$\cap$ع={هـ}
برهن أن أب = ب أ لكل أ $\in$ ل و ب $\in$ ع.





التكامل غير المحدد



الفصل الخامس

التكامل غير المحدد

تعريف التابع الأصلي:

نقول عن ق أنه تابعاً أصلياً لـ ق إذا كان قَ = قَ وسنرمز له بالصيغة ق(س) = ∫ قَ(س).دس ونقول أن التكامل غير المحدد لـ قَ سيعطينا التابع ق(س) أو نقول أن التابع الأصلي لـ قَ هو ق.

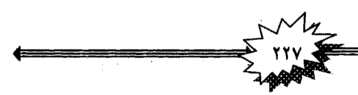
تمهيد: إن عملية البحث عن التابع الأصلي لتابع قَ معطى تمثل العملية المعاكسة لعملية إيجاد مشتق للتابع فنحن هنا نحاول أن نوجد تابع مشتقة هو التابع المعطى قَ وهذه العملية هي العملية التي أسميناها التكامل غير المحدد.

ملاحظات هامة:

١- إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ قَ فإن ق ليس وحيداً ذلك لأن ق+جـ أيضاً تابعاً أصلياً لـ قَ حيث جـ ∋ ح وذلك لأن (ق+جـ)َ = قَ + جـَ = قَ + ٠ = قَ.

٢- باعتبار أن التكامل غير المحدد عملية معاكسة لعملية الاشتقاق وبالأخذ بعين الاعتبار تعريف التابع الأصلي.

$$\frac{دق}{دس} = \frac{د}{دس} . ∫ قَ(س) دس = ∫ \frac{دقَ}{دس} . دس = ق$$



خواص التكامل غير المحدد:

١- إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ ك، قَ تابعاً أصلياً لـ ل عندئـذ فـإن ق+ك يمثـل تابعاً أصلياً ق+ل ذلك لأن (ق+ك)َ = قَ + كَ = قَ + ل.

٢- إذا كان ق تابعاً أصلياً لـ قَ وكـان $\alpha \ni$ ح عندئـذٍ فـإن α . ق هـو تـابع أصلي للتابع α . قَ ذلك لأن (α . ق)َ = α . قَ = α . قَ

٣- يمكن تعميم الخاصتين أعلاه حتى عدد منته من التوابع حيث أنه إذا كـان قي تابعـاً أصـلياً لــ قَي عندئـذ فـإن التـابع الأصـلي للتـابع $\psi = \sum_{ي=1}^{ن} \alpha_ي$ قَي حيث $\alpha_ي \ni$ ح هو التابع $\psi = \sum_{ي=1}^{ن} \alpha_ي$.قي

أخيراً يمكن اعتماداً على الخواص كتابة العلاقات التالية:

١- ∫ق+ل س).دس=∫ق س).دس+∫ل(س)دس

٢- ∫α.ق س)دس=α.∫ق(س)دس

٣- ∫αق+Bل س).دس=α.∫ق س)دس+B.∫ل(س)دس

جدول التكاملات البسيطة

يمكننا الآن إيراد جدول مماثل لما أوردناه في الفصل الثاني ص وذلك فقط بالنظر إلى التابع الأصلي كتابعاً مشتقة التابع المعطى قَ.

التابع الأصلي	التابع
$\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ	$س^{ن}$
$هـ^{س}$ + جـ	$هـ^{س}$
$لو_{هـ}$ س + جـ	$\frac{1}{س}$
$\frac{أ^{س}}{لو_{هـ} س}$ + جـ	$أ^{س}$
- جتا س + جـ	جا س
جا س + جـ	جتا س
ظا س + جـ	$\frac{1}{جتا^{2} س}$
- ظتا س + جـ	$\frac{1}{جا^{2} س}$
- قوس (جتا س) + جـ	$\frac{1}{\sqrt{1 - س^{2}}}$
- قوس (ظتا س + جـ)	$\frac{1}{1 + س^{2}}$
جتا (قطع) س + جـ	جا (قطع) س
جا (قطع) س + أ	جتا (قطع) س
ظا (قطع) س + أ	$\frac{1}{جا^{2} (قطع) س}$
ظتا (قطع) س + جـ	$\frac{1}{جتا^{2} (قطع) س}$

التابع الأصلي	التابع
قوس جتا (قطع) س + جـ	$\frac{1}{\sqrt{س^2-1}}$
- قوس ظتا (قطع) س + جـ	$\frac{1}{\sqrt{1-س^2}}$

تسمي هذه التكاملات تكاملات أساسية بسيطة شهيرة.

الآن سوف نتعلم طرائق متقدمة في حساب أي تكامل غير محدد.

١- الطريقة الأولى: طريقة تغير المتحول

إذا كان لدينا تابعاً ما مثل قَ بحيث أن التكامل المطلوب

هو

ع=∫ق(ل(س)) عندئذٍ فإننا سوف نجري تغيير المتحول من س إلى ت حيث ت= ل(س) ومن ثم سوف نحسب التفاضل للعبارة الأخيرة بالشكل د ت= لَ(س) . دس ومن ثم نحسب قيمة دس بدلالة ت ونعوض ما حصلنا عليه في التكامل ع ليصبح:

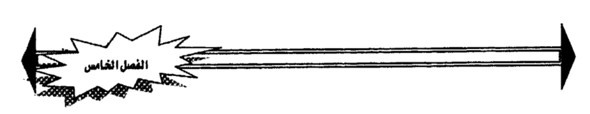
ع=∫ق(ت).ψ َ(ت).د ت   دس = ψ َ(ت) دت.

وباختيار مناسب قد نحصل على تكامل بسيط.

مثال: احسب التكامل ع=∫ ظا س.د س

الآن بملاحظة أن ع=∫ ظا س.د س =∫ $\frac{جا س}{جتا س}$.د س





وبافتراض ت= جتا س ⟸ دت = - حاس . دس ⟸ $دس = \frac{دت}{-جاس}$

الآن بملاحظة التكامل $ع = \int \frac{جاس}{ت} . \frac{دت}{-جاس} = - \int \frac{دت}{ت}$

$\Leftarrow ع = \int \frac{دت}{ت} = -$ لوهـ ت + جـ = - لوهـ جتاس + جـ

مثال: $ع = \int \frac{دس}{س\ لو_{هـ} س}$ ولنفرض من أجل هذا التكامل ت= لوهـ س

$ت = \frac{1}{س} . دس$ ⟸ دس= س. دت

الآن لنعوض في التكامل

$\Leftarrow ع = \int \frac{س.دت}{س.ت} = \int \frac{دت}{ت} = -$ لوهـ ت + جـ = - لوهـ (لوهـ س) + جـ

مثال: $ع = \int س.هـ^{س^2}.دس$

لنفرض ت= $س^2$ ⟸ دت= ٢س دس ⟸ $دس = \frac{دت}{2س}$

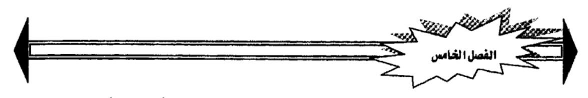
الآن لنعوض في التكامل

$ع = \int س.هـ^{ت} . \frac{دت}{2س} = \frac{1}{2} . \int هـ^{ت} . دت = \frac{1}{2} هـ^{ت} + جـ = \frac{1}{2} هـ^{س^2} + جـ$

مثـــال: $ع = \int (2س+5)^{10} دس$ لنفـــرض أن ت= ٢س+٥ ⟸ دت= ٢دس ⟸ $دس = \frac{دت}{2}$

لنعوض الآن في التكامل





$$ع=\int ت^{١٠}.\frac{دت}{٢}=\frac{١}{٢}.\int ت^{١٠}.دت=\frac{١}{٢}.\frac{ت^{١١}}{١١}+جـ=\frac{ت^{١١}}{٢٢}+جـ=\frac{(٢س+٥)^{١١}}{٢٢}+جـ$$

مثال: $ع=\int جا^{٢}(قطع)س.دس$ الآن لنفرض أن جا (قطع) س = ت

$$دت = جتا (قطع) . دس \Longrightarrow دس=\frac{دت}{جتا(قطع)س}$$

وبالتعويض في التكامل

$$ع=\int ت^{٢}.\ جتا(قطع)س.\frac{دت}{جتا(قطع)س}=\int ت^{٢}.دت=\frac{ت^{٣}}{٣}+جـ=\frac{جتا^{٣}(قطع)س}{٣}+جـ$$

مثال: $ع=\int \frac{س-١}{س^{٢}+١}.دس$ أولاً يمكننا كتابة التكامل بالشكل

$$ع=\int \frac{س}{س^{٢}+١}-\frac{١}{س^{٢}+١}دس=\int \frac{س\,دس}{س^{٢}+١}-\int \frac{دس}{س^{٢}+١}$$

الآن بملاحظة التكامل $ع=\int \frac{س}{س^{٢}+١}.دس$ يمكن فرض ت= $س^{٢}+١$

دت= ٢س دس وبالتعويض في التكامل

$$ع=\int \frac{س}{ت}.\frac{دت}{٢س}=\frac{١}{٢}\int \frac{دت}{ت}=\frac{١}{٢}.\ لو_{هـ}ت=\frac{١}{٢}\ لو_{هـ}(١+س^{٢})$$

أما التكامل $ف=\int \frac{دس}{س^{٢}+١}=$ قوسظا س عندئذٍ فإن

$$\int \frac{س-١}{س^{٢}+١}.دس=\frac{١}{٢}\ لو_{هـ}(س^{٢}+١)+ قوسظا س+جـ$$

٢ . *الطريقة الثانية – طريقة التجزئة*

يستند الأساس النظري لهذه الطريقة على العلاقة د(ل.ع) = دل. ع+ع. دل وبأخذ تكامل الطرفين نجد أن:



$$\int \text{د}(\text{ل}.\text{ع}) = \int \text{دل}.\text{ع} + \int \text{ل}.\text{دع}$$

$$\text{ل}.\text{ع} = \int \text{ع}.\text{دل} + \int \text{ل}.\text{دع} \Leftarrow \int \text{ع دل} = \text{ل}.\text{ع} - \int \text{ل}.\text{دع}$$

وسنسمي التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة بالتكامل الباقي وسنرمز له بـ $\text{ح}\int \text{ل دع}$

ملاحظة: تستخدم طريقة التجزئة في الغالب إذا أمكن كتابة التابع ق داخل المتكامل بالشكل قَ= ل. دع حيث أحد التابعين وهو ع قابلاً للمكاملة بسهولة.

مثال: $\text{ص} = \int \text{س هـ}^{\text{س}}.\text{دس}$ سنختار الآن

$$\text{ل} = \text{س} \quad \text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}.\ \text{دس} \quad \Longleftarrow \quad \text{دل} = \text{دس} \quad \text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

عندئذٍ فإن:

$$\int \text{س هـ}^{\text{س}}.\text{دس} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{ح}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

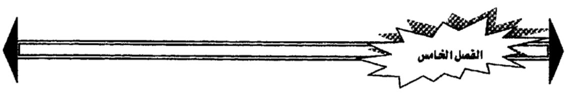
$$\Leftarrow \int \text{س هـ}^{\text{س}}.\text{دس} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جـ}$$

مثال: $\int \text{س}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{دس}$ سنختار الآن دل= س. دس   ع= $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

$$\Leftarrow \text{ل} = \frac{\text{س}^{2}}{2} \qquad\qquad \text{دع} = \frac{1}{\text{س}}.\text{دس}$$

$$\int \text{س}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{دس} = \frac{\text{س}^{2}}{2}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^{2}}{2}.\frac{1}{\text{س}}.\text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{2}}{2}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}}{2}.\text{دس} \Leftarrow \text{ح}\int \frac{\text{س}}{2}.\text{دس} = \frac{\text{س}^{2}}{4} + \text{جـ}$$



$\Leftarrow \int$ س. لو$_هـ$ س.دس $= \frac{س^2}{2}$. لو$_هـ$ س $- \frac{س^2}{4} +$ جـ

مثال: ص $= \int$ قوس ظاس دس **إذا اخترنا ل= قوس ظا س دع= دس**

دل $= \frac{1}{1+س^2}$.دس **ع= س**

$\Leftarrow \int$ قوس ظاس دس = س. قوس ظاس $- \int \frac{س}{1+س^2}$.دس

الآن من أجل التكامل $\Leftarrow$ ح $\int \frac{س}{1+س^2}$.دس **سنختار تغيراً للتحول**

ت= ١+س^2 $\Longleftarrow$ دت= ٢س. دس

$\Leftarrow$ دس $= \frac{دت}{2س}$

ح $= \int \frac{س}{ت}.\frac{دت}{2س} = \frac{1}{2} \int \frac{دت}{ت} = \frac{1}{2}$. لو$_هـ$ ت + جـ $= \frac{1}{2}$. لو$_هـ$ (١+س^2)+جـ

$\Leftarrow \int$ وتر ظاس دس = س وتر ظاس $- \frac{1}{2}$ لو$_هـ$ (١+س^2)+جـ

مثال: ص $= \int$ لو$_هـ$ س دس **سنجري التجزئة بالشكل:**

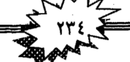
دل = دس ع= لو$_هـ$س

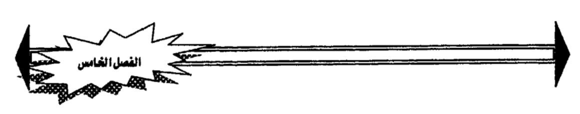
ل = س دع $= \frac{1}{س}$دس

$\Leftarrow \int$ لو$_هـ$ س دس = س لو$_هـ$ س $- \int$ س. $\frac{1}{س}$ دس = س لو$_هـ$ س $- \int$ دس = س لو$_هـ$ س $-$ س + جـ

مثال: ص $= \int$ س^2 جتاس دس **سنجري التجزئة**

ل = س^2 دع= جتا س . دس





دل = ٢س . دس   ع = جا س

⇐ ∫س٢ جتاس دس = س٢ . جاس − ∫٢س . جاس دس = س٢ . جاس − ٢ . ∫س جاس دس

الآن من أجل التكامل ح ∫س جاس . دس

سنجري تجزئة مرة أخرى بالشكل: ل = س   دع = جا س . دس

دل = دس   ع = − جتا س

⇐ ح ∫س جاس . دس = − س جتاس + ∫جتاس . دس = − س . جتاس + جاس + جـ

الآن سنعود إلى التكامل ص ليصبح:

ص = س٢ جاس + ٢س . جتاس − ٢جاس + جـ

⇐ ∫س٢ جتاس دس = س٢ جاس + ٢س . جتاس − ٢جاس + جـ

مثال: ص = ∫جا (لوهـ س) دس

من أجل حساب هذا التكامل سنجري أولاً تغييراً للمتحول بالشكل

ت = لوهـ س ⟸ دت = $\frac{1}{س}$ دس ⟸ دس = س د ت ⟸ دس = هـ^ت د ت

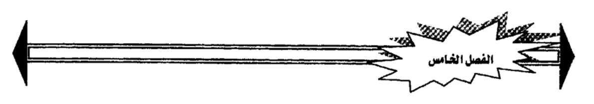
ذلك لأن هـ^ت = س

الآن لنعوض في التكامل ص فنجد أن ص = ∫هـ^ت . جات . دت

الآن سنجري عملية التجزئة بالشكل

ل = هـ^ت   دع = جا ت . دت

⇐ دل = هـ^ت . دت   ع = − جتا ت



$\Leftarrow$ ص $= \int$ هـ^{ت} . جا ت . دت $=$ − هـ^{ت} . جتا ت $+ \int$ هـ^{ت} . جتا ت دت

الآن من أجل

ح $\int$ هـ^{ت} . جا ت . دت سنجري من أجله تجزئة بالشكل:

ل = هـ^{ت} دع = جتا ت . دت

دل = هـ^{ت} . دت ع = جا ت

ح $= \int$ هـ^{ت} . جا ت . دت $=$ − هـ^{ت} . جا ت $+ \int$ هـ^{ت} جا ت دت

الآن نعوض ما حصلنا عليه في العلاقة (*) فنجد أن:

$\int$ هـ^{ت} . جا ت . دت $=$ − هـ^{ت} جتا $+$ هـ^{ت} . جا ت $- \int$ هـ^{ت} جا ت دت

٢ . $\int$ هـ^{ت} . جا ت . دت $=$ هـ^{ت} جا ت − هـ^{ت} . جتا ت $\Leftarrow \int$ هـ^{ت} جا ت دت $= \frac{\text{هـ}^{ت} . \text{جا ت} - \text{هـ}^{ت} \text{ جتا ت}}{٢} +$ جـ

الآن بالعودة إلى المتحول س نجد أن:

$\int$ جا (لو$_{هـ}$ س) . دس $= \frac{١}{٢}$ [هـ$^{لو_{هـ} س}$. جا (لو$_{هـ}$ س) − هـ$^{لو_{هـ} س}$. جتا (لو$_{هـ}$ س)]

$= \frac{١}{٢}$. [س . جا (لو$_{هـ}$ س) − س جتا (لو$_{هـ}$ س) + جـ]

في الواقع يمكن استخدام العلاقة π١ للحصول على التكامل $\int$ هـ^{ت} جتا ت دت

وذلك إذا عوضنا م $=$ ت $- \frac{\pi}{٢}$ في العلاقة المذكورة وبملاحظة دم = دت نجد أن:

$\int$ هـ^{م} . جا م دم $= \frac{١}{٢}$. [هـ^{م} . جا م − هـ^{م} . جتا م]

$\Leftarrow \int$ هـ$^{ت-\pi/٢}$. جا $\left(ت - \frac{\pi}{٢}\right)$. دت $= \frac{١}{٢}$. $\left[\text{هـ}^{ت-\pi/٢} \text{ جا} \left(ت - \frac{\pi}{٢}\right) - \text{هـ}^{ت-\pi/٢} . \text{ جتا} (ت - \pi/٢)\right]$



$$\int \text{جتات دت} = \frac{1}{2}\left[\text{هـ}^{ت} \ \text{جتات} + \text{هـ}^{ت} . \text{جات}\right]$$

$$\Leftarrow \text{هـ}^{-\pi/2} \int \text{هـ}^{ت} . \ \text{جتات دت} = \text{هـ}^{-\pi/2} \left(\frac{1}{2} \ \text{جتات} + \text{هـ}^{ت} . \text{جات}\right) \Leftarrow \int \text{هـ}^{ت}$$

ويمكـــن كتابـــة القاعـــدة العامـــة للتكـــاملين $\text{ص} = \int \text{هـ}^{أس} \ \text{جتاب س.د س}$ ،

$\text{ص} = \int \text{هـ}^{أس} \ \text{جاب س.د س}$

وذلك بالشكل

$$\text{ص} = \int \text{هـ}^{أس} \ \text{جاب س.د س} = \text{هـ}^{أس} . \left(\frac{\text{أجاب س} - \text{ب} \ \ \text{جتاب س}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\right)$$

$$\text{ص} = \int \text{هـ}^{أس} \ \ \text{جتاب س.د س} = \text{هـ}^{أس} . \left(\frac{\text{أ} \ \ \text{جتاب س} - \text{ب جاب س}}{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}\right)$$

سوف نترك إثبات هاتين العلاقتين للقارئ علماً أنها تحل بنفس طريقة التمرين السابق.

$\text{ص} = \int \text{هـ}^{س} \ \text{جا س.د س}$ ، $\text{ص} = \int \text{هـ}^{س} \ \text{جتا س.د س}$

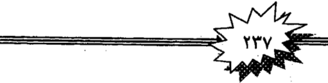
٣. *الطريقة الثالثة: طريقة التكامل بالتدريج:*

عندما تكون أمام تابع بسيط ولكنه مرفوع إلى الدرجة (ن) عندئذ فإن طريقة التكامل بالتدريج تكون ناجحة جداً وسوف نلخصها كما يلي:

١. نحاول مبدئياً إجراء تجزئة أو تغيير للمتحول لخفض الدرجة (ن).

٢. نوجد بعد ذلك دستوراً بين التكامل المعطى ولنسميه $\text{ص}_{ن}$ والتكامل نفسه بعد أن خفضنا درجته بالشكل

$$\text{ص}_{ن} = \Psi(\text{س}) + \leq(\text{ن}) . \text{ص}_{ن-و} \ : \ \text{و} \in \text{ن}$$



مثال: $ص_{ن} = \int جتا^{ن}س.دس$

لحل هذا التكامل سوف نكتب التالي:

$$ص_{ن} = \int جتا^{ن}س.دس = \int جتا^{ن-٢}س.\ جتا^{٢}س = \int جتا^{ن-٢}س(١-جا^{٢}س)دس$$

$$= \int جتا^{ن-٢}س دس - \int جتا^{ن-٢}س.جا^{٢}س دس$$

$$= ص_{ن-٢} - \int جتا^{ن-٢}س.جا^{٢}س دس$$

الآن بالنسبة للتكامل في الطرف الأيمن سنحله وفق تجزئة بالشكل:

$$\int جتا^{ن-٢}س.جا^{٢}س دس = \int جتا^{ن-٢}س.جاس.جاس.دل$$

$$دل = جتا^{ن-٢}س\ .\ جا\ س\ .\ دس \qquad ع = جا\ س$$

$$ل = \frac{-\ جتا^{ن-١}س}{ن-١} \qquad دع = جتاس\ دس$$

$$\Leftarrow \int جتا^{ن-٢}.جا^{٢}س دس = \frac{-\ جتا^{ن-١}س.جاس}{ن-١} + \frac{١}{ن-١}\int جتا^{ن}س.دس$$

الآن سنعود إلى $ص_{ن}$ فنجد أن:

$$ص_{ن} = ص_{ن-٢} + \frac{جتا^{ن-١}س.جاس}{ن-١} - \frac{١}{ن-١}.ص_{ن}$$

$$\Leftarrow \left(١+\frac{١}{ن-١}\right)ص_{ن} = ص_{ن-٢} + \frac{١}{ن-١}\ جتا^{ن-١}س.جاس$$

$$ص_{ن} = \frac{١}{ن}\ جتا^{ن-١}س.جاس + \frac{ن-١}{ن}.ص_{ن-٢}$$

وهو الدستور التدريجي لحساب التكامل.

مثال: $ص_{ن} = \int جا^{ن}س دس$

إن هذا التمرين يحل بنفس طريقة التمرين السابق وسنترك ذلك للقارئ ويمكن حله أيضاً بالاستفادة من الدستور.

$$\int \text{جتا}^{ن}\text{س}\,\text{دس} = \frac{1}{ن}.\ \text{جتا}^{ن-1}\text{س}.\text{جاس} + \frac{ن-1}{ن}\int \text{جتا}^{ن-2}\text{س}.\text{دس}$$

وذلك بتعويض $\text{س} = \frac{\pi}{2} - \text{ت}$ = دس = -دت.

$$-\text{جت}\left(\frac{\pi}{2}-\text{ت}\right)^{ن}.\text{دت} = \frac{1}{ن}\ \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{ت}\right)^{ن-1}.\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{ت}\right) + \frac{ن-1}{ن}\int \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2}-\text{ت}\right)^{ن-2}.-\text{دت}$$

$$\int \text{جا}^{ن}\text{ت}\,\text{دت} = \frac{-1}{ن}\text{جا}^{ن-1}\text{س}.\ \text{جتاس} + \frac{ن-1}{ن}\int \text{جا}^{ن-2}\text{س}\,\text{دس}$$

$$\text{ص}_{ن} = \frac{-1}{ن}.\text{جا}^{ن-1}\text{س}.\ \text{جتاس} + \frac{ن-1}{ن}.\text{ص}_{ن-2}$$

مثال: $\text{ل}_{ن} = \int \text{ظا}^{ن}\text{س}$ **يمكن حل هذا التكامل بالشكل:**

$$\text{ل}_{ن} = \int \text{ظا}^{ن}\text{س} = \int \text{ظا}^{ن-2}\text{س}.\text{ظا}^{2}\text{س}\,\text{دس} = \int \text{ظا}^{ن-2}\text{س}.\left(\frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}} - 1\right).\text{دس}$$

$$= \int \text{ظا}^{ن-2}\text{س}.\frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}.\text{دس} - \int \text{ظا}^{ن-2}\text{س}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ظا}^{ن-2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\text{دس} - \text{ل}_{ن-2}$$

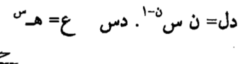
الآن من أجل التكامل $\int \frac{\text{ظا}^{ن-2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}.\text{دس}$ **نحله بفرض ت= ظاس ليصبح**

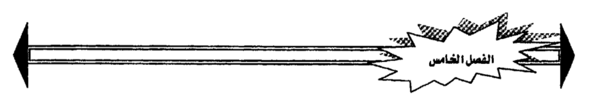
$$\int \frac{\text{ظا}^{ن-2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}.\text{دس} = \frac{\text{ظا}^{ن-1}}{ن-1}$$ **أخيراً نخلص إلى أن** $$\text{ل}_{ن} = \frac{\text{ظا}^{ن-1}}{ن-1} - \text{ل}_{ن-2}$$

مثال: $\text{ص}_{ن} = \int \text{س}^{ن}.\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ **بحل هذا التكامل بأخذ التجزئة**

ل= $\text{س}^{ن}$ دع= $\text{هـ}^{\text{س}}$. دس

دل= ن $\text{س}^{ن-1}$. دس ع= $\text{هـ}^{\text{س}}$





$$\Leftarrow \int \text{س}^{\text{ن}} . \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \text{س}^{\text{ن}}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{ن}\, \text{س}^{\text{ن}-1}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \text{س}^{\text{ن}}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \text{ن} \int \text{س}^{\text{ن}-1} . \text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس}$$

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}}\, \text{هـ}^{\text{س}} - \text{ن} . \text{ص}_{\text{ن}-1}$$

مثال: $\text{ص}_{\text{ن}} = \int \text{س}^{\text{م}} . \text{لو}_{\text{ه}}\, \text{س}^{\text{ن}} . \text{دس}$ **حيث** $\text{م} \in \text{ن}$

لنجري التجزئة $\text{دل} = \text{س}^{\text{م}} . \text{دس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \text{لوس}^{\text{ن}}$

$$\text{ل} = \frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} \qquad \text{دع} = \text{ن} . \text{لوس}^{\text{ن}-1} . \frac{1}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} . \text{لو}^{\text{ن}}\text{س} - \int \frac{\text{ن}}{\text{م}+1} . \text{س}^{\text{م}+1} . \frac{1}{\text{س}} . \text{لو}^{\text{ن}-1}\text{س} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{م}+1}\, \text{لو}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{م}+1} - \frac{\text{ن}}{\text{م}+1} \int \text{س}^{\text{م}}\, \text{لو}^{\text{ن}-1}\text{س} . \text{دس} \Leftarrow \text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{م}+1} . \text{لوس}^{\text{ن}}}{\text{م}+1} - \frac{\text{ن}}{\text{م}+1} . \text{ص}_{\text{ن}-1}$$

مثال: $\text{ص}_{\text{ن}} = \int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}}$ **يمكن حل هذا التكامل إذا كتبنا:**

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}} = \int \frac{\text{س}^2 + \text{أ}^2}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} \text{دس} = \int \frac{\text{س}^2}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس} + \int \frac{\text{أ}^2}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس}$$

الآن بملاحظة التكامل $\int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس}$ **يمكن حله بفرض التجزئة:**

$$\text{دل} = \int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس} \qquad \text{ع} = \text{س}$$

$$\text{ع} = \frac{1}{2\text{ن}} \frac{1}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}} \qquad \text{دع} = \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{س}^2\, \text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس} = \frac{-\text{س}}{2\text{ن}(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}} + \frac{1}{2\text{ن}} . \int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}}$$

$$\int \frac{\text{س}^2\, \text{دس}}{(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}+1}} . \text{دس} = \frac{-\text{س}}{2\text{ن}(\text{س}^2 + \text{أ}^2)^{\text{ن}}} + \frac{1}{2\text{ن}} . \text{ص}_{\text{ن}}$$ **وبملاحظة أن**

$$\int \frac{أ^{2}\, دس}{\left(س^{2}+أ^{2}\right)^{ن+1}}.دس = أ^{2}.\int \frac{دس}{\left(س^{2}+أ^{2}\right)^{ن+1}} = أ^{2}.ص_{ن+1}$$

الآن بالعودة إلى العلاقة (*) نجد أن:

$$ص_{ن} = \frac{-س}{2ن\left(س^{2}+أ^{2}\right)^{ن}} + \frac{1}{2ن}.ص_{ن} + أ^{2}\, ص_{ن+1}$$

$$\Leftarrow ص_{ن+1} = \frac{1}{2ن\, أ^{2}}.\left[\frac{س}{\left(س^{2}+أ^{2}\right)^{ن}} + (2ن-1).ص_{ن}\right]$$

مثال: $ص_{ن} = \int لو س^{ن}\, دس$ **بإجراء التجزئة ل= لوس^{ن} دع= دس**

$دل = ن.\ لو س^{ن-1}.\frac{1}{س} دس$ ، $ع = س$

$$ص_{ن} = \int لو س^{ن}\, دس = س\ لو^{ن}س - \int ن\ لو^{ن-1}س.\frac{1}{س}.س.دس$$

$$= س\ لو^{ن}س - \int ن\ لو^{ن-1}س.دس$$

$$\Leftarrow ص_{ن} = س.\ لو^{ن}س - ن.ص_{ن-1}$$

مثال: $ص_{ن} = \int جا^{ن}(قطع)س.دس$ **يمكن كتابة**

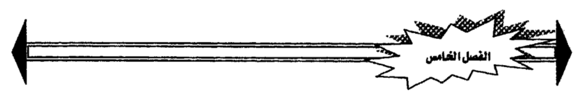
$$ص_{ن} = \int جا^{ن}(قطع)س.دس = \int جا^{ن-2}س.جا^{2}س.دس$$

$$جت^{2}(قطع)س\, دس - \int جا^{ن-2}(قطع)س\, دس$$

$$= \int جا^{ن-2}(قطع)س.(جتا^{2}(قطع)س - 1).دس = \int جا^{ن-2}(قطع)س.ا$$

$$ص_{ن} = \int جا^{ن-2}(قطع)س.\ جتا(قطع)س.\ جتا(قطع)س.دس - ص_{ن-2} \text{.......} (*)$$

الآن من أجل التكامل $\int جا^{ن-2}(قطع)س.\ جتا(قطع)\ جتا(قطع)دس$



يحل بإجراء التجزئة دل = $\text{جا}^{ن-2}$ (قطع) س. جتا (قطع) س ع = جتا (قطع) س

$$\text{ع} = \frac{\text{جا}^{ن-1}\text{(قطع)س}}{ن-1} \text{ ، دع = جا(قطع)س. دس}$$

$$\int \text{جا}^{ن-2}\text{(قطع)س. جتا}^{2}\text{(قطع)س.دس} = \frac{\text{جا}^{ن-1}\text{(قطع)س. جتا(قطع)س}}{ن-1} - \frac{1}{م-1} . \int \text{جا}^{ن}\text{(قطع)س.دس}$$

$$= \frac{\text{جا}^{ن-1}\text{(قطع)س. جتا(قطع)س}}{ن-1} - \frac{1}{ن-1} . \text{ص}_{ن}$$ الآن نعود إلى العلاقة * لنجد أن

$$\text{ص}_{ن} = \frac{\text{جا}^{ن-1}\text{(قطع)س. جتا(قطع)س}}{ن-1} - \frac{1}{ن-1} . \text{ص}_{ن} - \text{ص}_{ن-1}$$ بعد الإصلاح نجد أن

$$\text{ص}_{ن} = \frac{\text{جا}^{ن-1}\text{(قطع)س. جتا(قطع)س}}{ن-1} - \frac{1}{ن-1} . \text{ص}_{ن-2}$$

مناقشة عامة:

إن الطرق الثلاث المذكورة سابقاً هي الطرق التي يمكن حل بها أي تكامل تقريباً ولكن يجب أن نعرف كيف ومتى تستخدم هذه الطرق كي نستطيع حل التكامل وهذا الأمر بعد التوفيق من الله تعالى خبرة وممارسة كبيرة وفيما بعد سنقدم كيفية مكاملة أشكال عامة من التوزيع.

أولاً: تكامل التوابع الكسرية:

يعرّف التابع الكسري كما ورد معنا بالشكل $\text{ص(س)} = \frac{\text{ل}_{ن}\text{(س)}}{\text{ي}_{م}\text{(س)}}$ حيث $\text{ر}_{ن}$(س) حدودية من الدرجة (ن)، $\text{ي}_{م}$(س) حدودية من الدرجة (م) ونكتبها بالشكل:



$ر_ن(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + ... + أ$

$ي_م(س) = ب_م س^م + ب_{م-1} س^{م-1} + ... + ب$

في البداية سوف نعرف عملية قسمة الحدوديات:

إذا كان لدينا $ر_ن(س)$، $ي_م(س)$ حدوديتان عندئذ تعرف عملية القسمة بالشكل حيث ن>م

$$\frac{أ_ن}{ب_م}.س^{ن-م} + ...$$

$$ب_م س^م + ... + ب \;\Big)\; أ_ن س^ن ... + أ.$$

$$-\;أ_ن س^ن + ب_{م-1} \times \frac{أ_ن}{ب_م}.س^{ن-م} + ...$$

$$أ_{ن-1} - ب_{م-1}\left(\frac{أ_ن}{ب_م}\right)س^{ن-م} + ...$$

وهكذا حتى نصل إلى (حدودية باقي القسمة) والتي درجتها أقل من درجة $ي_م(س)$ وهي حدودية المقسوم عليه.

مثال: اقسم الحدودية $ر_ن(س) = س^٥ + ٢س^٣ + س^٢ + ١$ على الحدودية $ي_٢(س) = س^٢ + ٢س$

الحل:

بعد إجراء عملية القسمة نكتب:

$$\frac{س^٥ + ٢س^٣ + س^٢ + ١}{س^٢ + ٢س} = س^٣ - ٢س^٢ + ٦س - ١١ + \frac{٢٢س + ١}{س^٢ + ٢س}$$





$$
\begin{array}{l}
\text{س}^3-2\text{س}^2+6\text{س}-11 \\
\text{س}^2+2\text{س} \;\big)\; \text{س}^5+2\text{س}^3+\text{س}^2+1 \\
-\text{س}^5+2\text{س}^4 \\
\hline
-2\text{س}^4+2\text{س}^3+\text{س}^2+1 \\
-(-2\text{س}^4-4\text{س}^3) \\
\hline
6\text{س}^3+\text{س}^2+1 \\
-6\text{س}^3+12\text{س}^2 \\
\hline
-11\text{س}^2+1 \\
-(-11\text{س}^2-22\text{س}) \\
\hline
22\text{س}+1
\end{array}
$$

وسنسمي الحدودية الناتجة عن القسمة "خارج القسمة" وسنرمز لها بـ ك(س) ونسمي باقي القسمة بـ ح(س) وعندها سنكتب:

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}=\text{ك}(\text{س})+\frac{\text{ح}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}$$

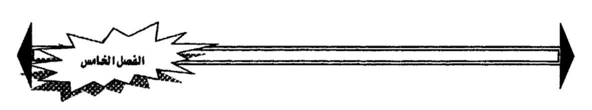
وتكون درجة ك(س) أصغر من أو تساوي م-ن ودرجة ح(س) أصغر من م.

مبرهنة: إذا كان $\text{س}_{\cdot}$ جذراً للمعادلة $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})=\cdot$ فإن الحدودية $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ ستقبل القسمة دون باقٍ على $\text{س}-\text{س}_{\cdot}$.

البرهان: بفرض $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ تقبل القسمة $\text{س}-\text{س}_{\cdot}$ مع باقي معلوم نفرضه ح(س) عندئذٍ فإن ح (س) ستساوي عدداً ثابتاً ذلك لأن درجة ح(س) ستكون أصغر من درجة $\text{س}-\text{س}_{\cdot}$ وبالتالي ح(س)= أ الآن لنكتب الشكل: $\frac{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}{\text{س}-\text{س}_{\cdot}}=\text{ل}_{\text{م}-1}(\text{س})+\frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{س}_{\cdot}}$

$$\Longleftarrow \text{ي}_{\text{م}}(\text{س})=(\text{س}-\text{س}_{\cdot})\,.\,\text{ل}_{\text{م}-1}(\text{س})+\text{أ}$$





بما أن $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س}_{.})=٠$ وبتعويض $\text{س}_{.}$ مكان س في العلاقة الأخيرة نحصل على $\text{ا}+٠=٠ \Longleftarrow \text{ا}=٠$ وهو المطلوب.

مبرهنة هامة: إن كل حدودية $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ ذات أمثال حقيقية ممكن تحليلها إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى أو الثانية على الأكثر.

ملاحظة: إن برهان هذه المبرهنة ليس في اختصاص هذا الكتاب.

الآن من أجل تكامل التوابع الكسرية لدينا حالتان هامتان:

١- إذا كانت درجة الحدودية في المقام أصغر من درجة الحدودية في البسط عندئذ يجب تقسيم الحدودية $\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})$ على الحدودية $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ لنحصل على الشكل:

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}=\text{ك}(\text{س})+\frac{\text{ح}_{\text{ل}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})} \quad : \text{ل}<\text{م}$$

وعندها يصبح $\int \frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}\text{دس}=\int \text{ك}(\text{س})\text{دس}+\int \frac{\text{ح}_{\text{ل}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}\text{دس}$

حيث ك(س) حدودية وتكاملها أمر بسيط.

أما من أجل التكامل $\int \frac{\text{ح}_{\text{ل}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}\text{دس} : \text{ل}<\text{م}$ فإننا نكون بذلك أمام الحالة الثانية.

٢- إذا كانت درجة حدودية المقام أكبر من درجة حدودية البسط عندئذ لابد من تفريق الكسر.

تفريق الكسور:

من أجل تفريق الكسر سوف نحلل المقام $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ إلى عوامل من الدرجة



الأولى والثانية على الأكثر علماً أن ذلك ممكن حسب المبرهنة السابقة وسنميز أربع حالات مهمة:

١. الحالة الأولى: إذا استطعنا تحليل $\text{ي}_{م}\text{س}$ إلى عوامل من الدرجة الأولى وغير مكررة عندئذٍ نستطيع كتابة الكسر بالشكل:

$$\frac{\text{ر}_{ن}(\text{س})}{\text{ي}_{م}(\text{س})}=\frac{\text{أ}_1}{\text{ا}_1\text{س}+\text{ب}_1}+\frac{\text{أ}_2}{\text{ا}_2+\text{س}_2+\text{ب}_2}+\dots+\frac{\text{أ}_{م}}{\text{ا}_{م}\text{س}+\text{ب}_{م}}$$

حيث أ_1، أ_2، ... ، $\text{أ}_{م}$ أمثال غير معينة.

نستطيع تعيين هذه الأمثال ببساطة إذا عوضنا م قيمة اختيارية في المطابقة * أعلاه لنحصل بذلك على م معادلة بـ م مجهول وبحلها يتحقق المطلوب.

مثال: من أجل $\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^4-2\text{س}^3+5\text{س}^2+2\text{س}}=\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}(\text{س}-1)(\text{س}+1)(\text{س}-2)}$

ويمكن تحليلها بالشكل:

$$\frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^4-2\text{س}^3+5\text{س}^2+2\text{س}}=\frac{\text{أ}_1}{\text{س}}+\frac{\text{أ}_2}{\text{س}-1}+\frac{\text{أ}_3}{\text{س}+1}+\frac{\text{أ}_4}{\text{س}-2}$$

الآن سنعوض س=−٢ في المطابقة لنحصل على:

$$12\text{أ}_1+8\text{أ}_2+24\text{أ}_3+6\text{أ}_4=-5$$

$$20\text{أ}_1+15\text{أ}_2+30\text{أ}_3+12\text{أ}_4=-10 \quad \text{، س}=-3$$

$$6\text{أ}_1+12\text{أ}_2+3\text{أ}_3+4\text{أ}_4=10 \quad \text{، س}=3$$

$$15\text{أ}_1+20\text{أ}_2+12\text{أ}_3-30\text{أ}_4=-17 \quad \text{، س}=4$$

وهي أربع معادلات وبحلها المشترك نحصل على:

$\text{أ}_{١} = ١/٢$ ، $\text{أ}_{٢} = -١$ ، $\text{أ}_{٣} = ١/٣$ ،

$\text{أ}_{٤} = ٥/٦$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٤}-٢\text{س}^{٢}+٥\text{س}^{٢}+٢\text{س}} = \frac{١}{\text{س}-٢} + \frac{١}{\text{س}-١} + \frac{١}{٣(\text{س}+١)} + \frac{٥}{٦(\text{س}-٢)}$$

ولكن كما رأينا فإن طريقة التعويض تكون في غالب الأحيان طويلـة لـذلك سوف نورد طريقة الضرب بمعامل وذلك بالشكل التالي:

إذا ضربنا طرفي العلاقة (*) بالعامل س سنحصل على:

$$\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\text{س}-٢)} = \text{أ}_{١} + \text{س}.\left[\frac{\text{أ}_{٢}}{\text{س}-١} + \frac{\text{أ}_{٣}}{\text{س}+١} + \frac{\text{أ}_{٤}}{\text{س}-٢}\right]$$

ثم نعوض س= ١ لنحصل على $\text{أ}_{٢} = -١$

وهكذا وبنفس الطريقة نحصل على $\text{أ}_{٤}$، $\text{أ}_{٣}$.

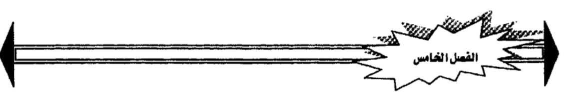
مثال: فرق الكسر $\frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٣}-\text{س}}$

الحل:

بملاحظة أن $\text{س}^{٣} - \text{س} = \text{س}(\text{س}+١)(\text{س}-١)$ عندئذٍ فإن:

$$\frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٣}-\text{س}} = \frac{\text{س}+١}{\text{س}(\text{س}+١)(\text{س}-١)} = \frac{١}{\text{س}(\text{س}-١)} + \frac{\text{أ}_{١}}{\text{س}} + \frac{\text{أ}_{٢}}{\text{س}-١}$$

الآن لإيجاد كلاً من $\text{أ}_{١}$، $\text{أ}_{٢}$ نجري التالي:



أولاً نضرب بـ س كلا الطرفين لنحصل على: $\frac{1}{س-1} = أ_1 + س.\frac{أ_1}{س-1}$

ونعوض س= ٠ في العلاقة السابقة فنحصل على أ$_1$= -١

وبنفس العملية من أجل أ$_2$ فنحصل على أ$_2$= ١ وبالتالي:

$$\frac{س+1}{س^3-س} = \frac{-1}{س} + \frac{1}{س-1}$$

٢. الحالة الثانية: إذا كان ي$_م$(س) يمكن أن يكتب كعوامل من الدرجة الأولى ومكررة وذلك بالشكل:

$$ي_م(س) = (أ_1+ب_1)^{ن_1} \cdot (م_1 س + ب_1)^{ن_2} \ldots (م_1 س + ب_ل)^{ن_ل}$$

وحيث ن$_1$ + ن$_2$ + ... ن$_1$= م عندئذ يفرق الكسر بالشكل:

$$\frac{ر_ن(س)}{ي_م(س)} = \frac{ر_ن(س)}{(م_1 س+ب_1)^{ن_1} \ldots (م_ل س+ب_ل)^{ن_ل}} = \frac{أ_1}{(م_1 س+ب_1)^{ن_1-1}} + \frac{أ_2}{(م_1 س+ب_1)^{ن_1-1}} + \ldots +$$

$$\frac{أ_ن}{م_1 س+ب_1} + \ldots + \frac{ب_1}{(م_2 س+ب_2)^{ن_2}} + \ldots$$

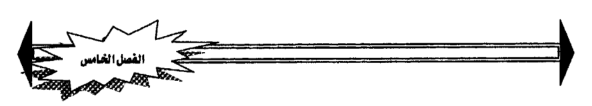
مثال: فرق الكسر التالي: $\frac{س^2+1}{س(س^2-1)^2}$ بملاحظة أن س(س^2-١)^2= س(س-١)^2 (س+١)^2

الآن نلاحظ أن:

$$\frac{س^2+1}{س(س^2-1)^2} = \frac{س^2+1}{س(س^2-1)^2} = \frac{أ_1}{س} + \frac{ب_1}{(س-1)^2} + \frac{ب_2}{س-1} + \frac{جـ_1}{(س+1)^2} + \frac{جـ_2}{(س+1)}$$

أما لإيجاد الأمثال أ$_1$، ب$_1$، ب$_2$، جـ$_1$، جـ$_2$ فإنه من أجل أعلى درجة للعامل يمكن تطبيق أسلوب الضرب بالعامل وذلك مثل أ$_1$، ب$_1$، جـ$_1$ أما من





أجل الباقي فلابد من توليد عدداً من المعادلات مساوٍ للمجاهيل وهي طريقة التعويض من أجل المثل نلاحظ أنه بالضرب بـ س ووضعه مساوياً للصفر نجد أن $\text{أ}_{١} = ١$.

وبالضرب بـ $(\text{س}-١)^{٢}$ ووضع س= ١ نجد أن $\text{ب}_{١} = ١/٢$.

وبالضرب بـ $(\text{س}+١)^{٢}$ ووضع س= -١ نجد أن $\text{جـ}_{١} = -١/٢$.

أما من أجل $\text{جـ}_{٢}$، $\text{ب}_{٢}$ فإذا عوضنا س= ٢ في العلاقة نحصل على $٩\text{ب}_{١} + ٣\text{جـ}_{٢} = ٧/٣$

وبتعويض س= -٢ نحصل على $\frac{-١}{٩}\text{ب}_{٢} - \text{جـ}_{٢} = ٣/٢$

وبحل المعادلتين الأخيرتين نحصل على:

$\text{ب}_{٢} = \frac{٤١}{٥٢}$، $\text{جـ}_{٢} = \frac{-٧٤٣}{٤٦٨}$ ونكون بذلك قد فرّقنا الكسر.

٣. الحالة الثالثة: إذا أمكن كتابة $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ على شكل عوامل من الدرجة الثانية وليست مكررة مثل $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س}) = (\text{أ}_{١}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{١}\text{س} + \text{جـ}_{١}) \ldots (\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{س} + \text{جـ}_{\text{ن}})$

واقع الأمر في هذه الحالة سيكون للمعادلة م $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س}) = ٠$ جذراً تحليلياً أو عقدياً مختلفاً نستطيع تفريق هذه الحالة بالشكل:

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{(\text{أ}_{١}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{١}\text{س} + \text{جـ}_{١}) \ldots (\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{س} + \text{جـ}_{\text{ن}})} = \frac{\text{أ}_{١}\text{س} + \text{ب}_{١}}{\text{أ}_{١}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{١}\text{س} + \text{جـ}} + \ldots + \frac{\text{أ}_{\text{ن}}\text{س} + \text{ب}_{\text{ن}}}{\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{٢} + \text{ب}_{\text{ن}}\text{س} + \text{جـ}_{\text{ن}}}$$

ونعين الأمثال $\text{ب}_{\text{ي}}$، أي المجهولة بطريقة التعويض أو المطابقة.



مثال: فرق الكسر $\dfrac{\text{س}^{3}}{(\text{س}^{2}+1)(\text{س}^{2}+4)}$

الحل:

$$\frac{\text{س}^{3}}{(\text{س}^{2}+1)(\text{س}^{2}+4)}=\frac{\text{أ}_{1}\text{س}+\text{ب}_{1}}{\text{س}^{2}+1}+\frac{\text{أ}_{2}\text{س}+\text{ب}_{2}}{\text{س}^{2}+4}$$

إذا استخدمنا أسلوب المطابقة فإننا سنحصل بعد توحيد المقام في الطرف الأيمن والإصلاح على

$$\begin{cases}\text{أ}_{1}+\text{أ}_{2}=1\\ \text{ب}_{1}+\text{ب}_{2}=0\\ 4\text{أ}_{1}+\text{أ}_{2}=0\\ 4\text{ب}_{1}+\text{ب}_{2}=0\end{cases}\Leftarrow \text{أ}_{1}=\frac{-1}{3}\ ،\ \text{أ}_{2}=\frac{4}{3}\ ،\ \text{ب}_{1}=\text{ب}_{2}=0$$

وبالتالي يصبح لدينا $\dfrac{\text{س}^{3}}{(\text{س}^{2}+1)(\text{س}^{2}+4)}=\dfrac{-\text{س}}{3(\text{س}^{2}-1)}+\dfrac{4\text{س}}{3(\text{س}^{2}+4)}$

٤. الحالة الرابعة: أن يكتب $\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})$ على شكل جداء لحدوديات من الدرجة الثانية ولكنها مكررة. وذلك بالشكل:

$$\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})=(\text{أ}_{1}\text{س}^{2}+\text{ب}_{1}\text{س}+\text{جـ}_{1})^{\text{ن}_{1}}+\ldots+(\text{أ}_{\text{ل}}\text{س}^{2}+\text{ب}_{\text{ل}}\text{س}+\text{جـ}_{\text{ن}})^{\text{ل ن}}$$

وللتفريق في هذه الحالة نكتب الشكل:

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}=\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{(\text{أ}_{1}\text{س}^{2}+\text{ب}_{1}\text{س}+\text{جـ}_{1})^{\text{ن}_{1}}\ldots(\text{أ}_{\text{ل}}\text{س}^{2}+\text{ب}_{\text{ل}}\text{س}+\text{جـ}_{\text{ل}})^{\text{ن}_{\text{ل}}}}=\frac{\text{أ}_{1}\text{س}+\text{ب}_{1}}{(\text{أ}_{1}\text{س}^{2}+\text{ب}_{1}\text{س}+\text{جـ}_{1})^{\text{ن}_{1}}}+\frac{\text{أ}_{2}\text{س}+\text{ب}_{2}}{(\text{أ}_{1}\text{س}^{2}+\text{ب}_{1}\text{س}+\text{جـ}_{1})^{\text{ن}_{1}-1}}+\ldots+\frac{\text{أ}_{\text{ن}_{1}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ن}_{1}}}{\text{أ}_{1}\text{س}^{2}+\text{ب}_{1}\text{س}+\text{جـ}_{1}}$$

مثال: فرق الكسر $\dfrac{2\text{س}^{2}+1}{(\text{س}^{2}+1)(\text{س}^{2}+4)^{2}}$ يمكن كتابة هذا النوع بالشكل:

$$\frac{2\text{س}^{2}+1}{(\text{س}^{2}+1)(\text{س}^{2}+4)^{2}}=\frac{\text{أ}_{1}\text{س}+\text{ب}_{1}}{(\text{س}^{2}+1)^{2}}+\frac{\text{أ}_{2}\text{س}+\text{ب}_{2}}{\text{س}^{2}+1}+\frac{\text{أ}_{3}\text{س}+\text{ب}_{3}}{(\text{س}^{2}+4)^{3}}+\frac{\text{أ}_{4}\text{س}+\text{ب}_{4}}{(\text{س}^{2}+4)^{2}}+\frac{\text{أ}_{5}\text{س}+\text{ب}_{5}}{(\text{س}^{2}+4)}$$

وبعدها نعين الأمثال إما بطريقة المطابقة أو التعويض بقيم معينة لـ س.

إلى حد الآن كنّا قد تعلمنا كيف نفرق أي كسر. أما طريقة المكاملة فهي على النحو التالي:

١- الحالة الأولى: في هذه الحالة كان لدينا:

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}=\frac{\text{أ}_1}{\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1}+\frac{\text{أ}_2}{\text{ٱ}_2\text{س}+\text{ب}_2}+\dots+\frac{\text{أ}_{\text{م}}}{\text{ٱ}_{\text{م}}\text{س}+\text{ب}_{\text{م}}}\Leftarrow\int\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}.\text{دس}=\int\frac{\text{أ}_1}{\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1}.\text{دس}+\dots+\int\frac{\text{أ}_{\text{م}}}{\text{ٱ}_{\text{م}}\text{س}+\text{ب}_{\text{م}}}.\text{دس}$$

الآن بالنظر إلى إحدى التكاملات $\int\frac{\text{أ}_{\text{ي}}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ي}}}$ نجد أنه إذا فرضنا ت= $\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ي}}\Longrightarrow\text{دت}=\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{دس}\Longrightarrow\text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}}$

$$\int\frac{\text{أ}_{\text{ي}}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ي}}}.\text{دس}=\text{أ}_{\text{ي}}\int\frac{\text{دت}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{ت}}=\frac{\text{أ}_{\text{ي}}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ت}=\frac{\text{أ}_{\text{ي}}}{\text{ٱ}_{\text{ي}}}.\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{ٱ}_{\text{ي}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ي}}\right)$$

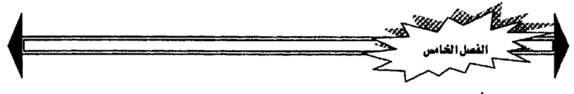
$$\Leftarrow\int\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}.\text{دس}=\frac{\text{أ}_1}{\text{ٱ}_1}.\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1\right)+\dots+\frac{\text{أ}_{\text{م}}}{\text{ٱ}_{\text{م}}}.\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{ٱ}_{\text{م}}\text{س}+\text{ب}_{\text{م}}\right)$$

٢- الحالة الثانية

$$\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}.\text{دس}=\frac{\text{أ}_1}{\left(\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1\right)^{\text{ن}_1}}+\dots+\frac{\text{أ}_{\text{ن}_1}}{\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1}+\dots$$

$$\int\frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})}.\text{دس}=\int\frac{\text{أ}_1}{\left(\text{ٱ}_1\text{س}+\text{ب}_1\right)^{\text{ن}_1}}.\text{دس}+\dots+\int\frac{\text{أ}_{\text{ن}_1}}{\left(\text{ٱ}_{\text{م}}\text{س}+\text{ب}_{\text{م}}\right)}.\text{دس}+\dots$$

الآن بملاحظة إحدى التكاملات في الطرف الأيمن نجد أن:



$$\int \frac{\text{أ}_{\text{ر}}}{(\text{م}_{\text{ر}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ر}})^{\text{ل}}}.\text{دس} = \text{أ}_{\text{ر}} . \int \frac{\text{دس}}{(\text{م}_{\text{ر}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ر}})^{\text{ل}}}$$

الآن بفرض $\text{م}_{\text{ر}}\text{س} + \text{ب}_{\text{ر}} = \text{ت} \Longrightarrow \text{م}_{\text{ر}} . \text{دس} = \text{دت} \Longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{م}_{\text{ر}}}$

$$\int \frac{\text{أ}_{\text{ر}}}{(\text{م}_{\text{ر}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ر}})^{\text{ل}}}.\text{دس} = \text{أ}_{\text{ر}} . \int \frac{\text{دت}}{\text{م}_{\text{ر}}\text{ت}^{\text{ل}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ر}}}{\text{م}_{\text{ر}}} . \int \text{ت}^{-\text{ل}} . \text{دت} = \frac{\text{أ}_{\text{ر}} . \text{ت}^{١-\text{ل}}}{\text{م}_{\text{ر}}\ ١-\text{ل}} = \frac{\text{أ}_{\text{ر}}}{\text{م}_{\text{ر}}(\text{م}_{\text{ر}}\text{س}+\text{ب}_{\text{ر}})^{١-\text{ل}}}$$

وهكذا يمكن مكاملة جميع التكاملات في الطرف الأيمن.

٣- الحالة الثالثة: تكون أمام التكاملات من الشكل:

$$\int \frac{\text{ر}_{\text{ن}}(\text{س})}{\text{ي}_{\text{م}}(\text{س})} . \text{دس} = \int \frac{\text{أ}_{١}\text{س}+\text{ب}_{١}}{\text{م}_{١}\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}} . \text{دس} + ...$$

بملاحظة التكامل $\int \frac{\text{أ}_{١}\text{س}+\text{ب}}{\text{م}_{١}\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}}$ فإننا نلاحظ أن $\text{ب}_{١}^{٢} - ٤\text{م}_{١}\text{ج}_{١} < ٠$

وذلك لكون الحدودية غير قابلة للتحليل إلى أبسط من ذلك. الآن لنكتب:

$$\int \frac{\text{أ}_{١}\text{س}+\text{ب}_{١}}{\text{م}_{١}\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}} . \text{دس} = \frac{\text{أ}_{١}}{\text{م}_{١}} . \int \frac{\text{س}+\text{ب}_{١}/\text{أ}_{١}}{\text{س}^{٢}+\frac{\text{ب}_{١}}{\text{م}_{١}}\text{س}+\frac{\text{ج}_{١}}{\text{م}_{١}}} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{أ}_{١}}{٢\text{م}_{١}} . \int \frac{٢\text{س}+٢\text{ب}_{١}/\text{أ}_{١}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}-\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}}{\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}/\text{م}_{١}} = \frac{\text{أ}_{١}}{٢\text{م}_{١}} \left[\int \frac{٢\text{س}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}}{\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}/\text{م}_{١}} . \text{دس} + \frac{٢\text{ب}_{١}/\text{أ}_{١}-\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}}{\text{س}^{٢}+\frac{\text{ب}_{١}}{\text{م}_{١}}\text{س}+\frac{\text{ج}_{١}}{\text{م}_{١}}} \right]$$

الآن لنسمي التكامل $\int \frac{٢\text{س}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}}{\text{س}^{٢}+\text{ب}_{١}/\text{م}_{١}\text{س}+\text{ج}_{١}/\text{م}_{١}} . \text{دس}$

الآن بتغيير المتحول بالشكل $\text{س}^{٢}+\frac{\text{ب}_{١}}{\text{م}_{١}}\text{س}+\frac{\text{ج}_{١}}{\text{م}_{١}} = \text{ت}$



$$ص=\int \frac{دت}{ت} = لو_هـ ت = لو_هـ \left(س^2 + \frac{ب_1}{م_1}س + \frac{جـ_1}{م_1}\right)$$

أما من أجل التكامل $ص=\int \frac{دس}{س^2+\frac{ب_1}{م_1}س+\frac{جـ_1}{م_1}}$ سنجري أولاً في المقام إكمال للربع ليصبح لدينا الشكل:

$$س^2+\frac{ب_1}{م_1}س+\frac{جـ_1}{م_1} = س^2+\frac{ب_1}{م_1}س+\left(\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2-\left(\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2+\frac{جـ_1}{م_1} = \left(س+\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2+م^2$$

ذلك لأن المقدار $م^2=\frac{جـ_1}{م_1}-\left(\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2>0$ وذلك لأن $4م_1جـ_1-ب_1^2>0$

عندئذ يصبح شكل التكامل كما يلي: $ص=\int \frac{دس}{\left(س+\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2+م^2}$

هنا سنجري تغييراً للمتحول:

$$ت=س+\frac{ب_1}{2م_1} \Leftarrow دت=دس$$

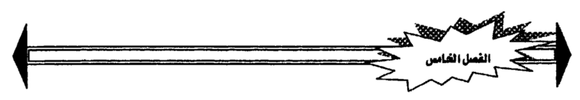
$$ص=\int \frac{دت}{ت^2+م^2}=\frac{1}{م}.\text{قوسظا}\frac{ت}{م} \Leftarrow \int \frac{دس}{\left(س+\frac{ب_1}{2م_1}\right)^2+م^2}=\frac{1}{م}.\text{قوسظا}\left(\frac{س+ب_1/2م_1}{م}\right)$$

أخيراً نخلص إلى أن:

$$\int \frac{أ_1س+ب_1}{م_1س^2+ب_1س+جـ_1}.دس=\frac{أ_1}{2م_1}.لو_هـ\left(س^2+\frac{ب_1}{م_1}س+\frac{جـ_1}{م_1}\right)+$$

$\left(\frac{2ب_1}{أ_1}-\frac{ب_1}{م_1}\right).\frac{1}{م}.\text{قوسظا}\left[\frac{س+ب_1/2م_1}{م}\right]+جـ$ وبذلك نكون قد أجرينا التكامل كاملاً.





٤. الحالة الرابعة: تحل التكاملات $\int \frac{أ_١ س + ب_١}{(م_١ س^٢ + ب_١ س + جـ_١)^ل}.دس$ بطرق تدريجية كما مر معنا في مثال سابق.

تمارين محلولة على التكاملات الكسرية:

احسب كلاً من التكاملات الكسرية التالية:

١- $\int \frac{٢س+٣}{(س-٢)(س+٥)}.دس$ أولاً سنفرق الكسر:

$$\int \frac{٢س+٣}{(س-٢)(س+٥)} = \frac{أ_١}{س-٢} + \frac{ب}{س+٥}$$

وبإجراء عملية الضرب بالعامل نحصل على أ= ١، ب=١.

$$\int \frac{٢س+٣}{(س-٢)(س+٥)}.دس = \int \frac{دس}{س-٢} + \int \frac{ب}{س+٥} = لو_هـ(س-٢) + لو_هـ(س+٥) + جـ$$

٢- $\int \frac{س.دس}{(س-١)^٢(س^٢+٢س+٢)}$ لنفرض الكسر أولاً:

$$\frac{س}{(س-١)^٢(س^٢+٢س+٢)} = \frac{أ}{(س-١)^٢} + \frac{ب}{(س-١)} + \frac{جـس+د}{س^٢+٢س+٢}$$

وبعد تعيين الأمثال نحصل على $د = \frac{١٦}{٩}$ ، $ب = جـ = \frac{-١}{٤٥}$ ، $أ = \frac{١}{٥}$

الآن نجري التكامل

$$\int \frac{س.دس}{(س-١)^٢(س^٢+٢س+٢)} = \frac{١}{٥}.\int \frac{دس}{(س-١)^٢} - \frac{١}{٤٥}.\int \frac{دس}{س-١} + \frac{\frac{-١}{٤٥}.س + \frac{١٦}{٦}}{س^٢+٢س+٢}.دس$$

$$= \frac{١}{٥}.\frac{-١}{س-١} - \frac{١}{٤٥}.لو_هـ(س-١) + \left(\frac{-١}{٩}\right).\int \frac{-\frac{١}{٥}س + ١٦}{س^٢+٢س+٢}دس$$



الآن من أجل التكامل الأخير نجد أن:

$$\int \frac{\frac{-1}{5}\text{س}+16}{\text{س}^2+2\text{س}+2}.\text{دس}=\frac{-1}{5}\int \frac{\text{س}-80}{\text{س}^2+2\text{س}+2}.\text{دس}=\frac{-1}{5}\times\frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}+2-162-2}{\text{س}^2+2\text{س}+2}.\text{دس}$$

$$=\frac{-1}{10}\left[\int \frac{2\text{س}+2}{\text{س}^2+2\text{س}+2}.\text{دس}-162\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^2+2\text{س}+2}\right]=\frac{-1}{10}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+2\text{س}+2)-162\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^2+2\text{س}+2}\right]$$

الآن من أجل التكامل $\text{ك}=\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^2+2\text{س}+2}$

سنكمل المربع في المقام $\text{ك}=\int \frac{\text{دس}}{(\text{س}^2+2\text{س}+1)+1}=\int \frac{\text{دس}}{(\text{س}+1)^2+1}$

الآن سنجري تغييراً للمتحول ت= س+١ ⟸ دت = دس

$\text{ك}=\int \frac{\text{دت}}{\text{ت}^2+1}$ = قوس ظات = قوس ظا(س+١) + جـ

الآن نعود إلى التكامل $\int \frac{\text{س}+1}{(\text{س}^2+2\text{س}+2)(\text{س}-1)^2}$ لنجد أنه =

$$\frac{-1}{5}.\frac{1}{\text{س}-1}-\frac{1}{45}.\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-1)-\frac{1}{90}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+2\text{س}+2)+\frac{162}{90}\text{قوسظا}(\text{س}+1)+\text{جـ}$$

٣- $\int \frac{\text{س}^3}{(\text{س}^2+1)(\text{س}^2+4)}.\text{دس}$ إن هذا الكسر قد فرقناه في المثال:

$$\int \frac{\text{س}^3}{(\text{س}^2+1)(\text{س}^2+4)}.\text{دس}=\frac{-1}{3}\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1}\text{دس}+\frac{4}{3}\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+4}$$

$$=\frac{-1}{3}.\frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1}.\text{دس}+\frac{4}{3}.\frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+4}.\text{دس}=\frac{-1}{6}.\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1)+\frac{2}{3}.\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+4)+\text{جـ}$$

٤- $\int \frac{\text{س}+١}{٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٥}.\text{دس}$ نجد أن هذا التكامل من الحالة الثالثة لأن

$\Delta = ١-٤\times٢\times٦ = -٣٩$

$$\int \frac{\text{س}+١}{٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٥}.\text{دس} = \frac{١}{٢}\int \frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٢}+\frac{١}{٢}\text{س}+\frac{٥}{٢}}.\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٢}.\frac{١}{٢}.\int \frac{٢\text{س}+\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٢}}{٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٥}.\text{دس} = \frac{١}{٤}.\left[\int \frac{٢\text{س}+\frac{١}{٢}}{\text{س}^{٢}+\frac{١}{٢}\text{س}+\frac{٥}{٢}}.\text{دس} + \frac{٣}{٢}\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٢}+\frac{١}{٢}\text{س}+\frac{٥}{٢}}\right]$$

$$= \frac{١}{٤}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}+\frac{١}{٢}\text{س}+\frac{٥}{٢}\right)+\frac{٣}{٢}.\frac{١}{\sqrt{\frac{٣٩}{١٦}}}.\ \text{قوس ظا}\frac{\text{س}+\frac{١}{٤}}{\sqrt{\frac{٣٩}{١٦}}}\right)$$

ملاحظة هامة: إن ما أوردناه سابقاً هو الطريقة العامة لحل أي تكامل كسري وقد تبين معنا أن أي تكامل كسري هو تكامل قابل للمكاملة وإيجاد التابع الأصلي.

ثانياً: تكاملات التوابع الصّماء:

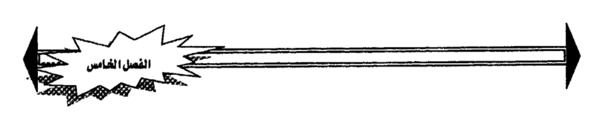
تحوي هذه التوابع جذوراً من درجات مختلفة لتوابع كسرية وصحيحة وتنقسم إلى الأنواع التالية:

١- التكاملات الحاوية على جذور مختلفة لتابع كسري خطي:

ولها قسمان أساسيان:

أ-التكاملات من الشكل $\text{ص} = \int \text{ح}\left(\text{س}، \text{س}^{\text{ر}_١}، \text{س}^{\text{ر}_٢}، \ldots، \text{س}^{\text{ر}_٣}\right).\text{دس}$

حيث $\text{ر}_١$، $\text{ر}_٢$، ... ، $\text{ر}_٣$ أعداداً كسرية بالشكل:



$$\text{ر}_1 = \frac{\text{ح}_1}{\text{ي}_1} ،\ \text{ر}_2 = \frac{\text{ح}_2}{\text{ي}_2} ،\ \dots ،\ \text{ر}_\text{م} = \frac{\text{ح}_\text{م}}{\text{ي}_\text{م}}$$

من أجل هذا النوع سنفرض أن $\text{س} = \text{ت}^{\text{ح}}$ حيث ح هو المضاعف المشترك الأصغر لـ $\text{ي}_1 ، \text{ي}_2 ، \dots ، \text{ي}_\text{م}$ وبالتالي نحصل على $\text{دس} = \text{ح} \, \text{ت}^{\text{ح}-1} . \text{دت}$

$$\text{ص} = \int \text{ح}\left(\text{ت}^{\text{ح}} ، \text{ت}^{\text{ل}_1} ، \text{ت}^{\text{ل}_\text{م}}\right) . \text{ح} \, \text{ت}^{\text{ح}-1} . \text{دت}$$

حيث ل، ... ، لم أعداد طبيعية وبالتالي حصلنا بذلك على تكامل لتابع صحيح أو كسري.

مثال: $\text{ص} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}\left(1 + 2\sqrt{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}}\right)}$ **بملاحظة أنه لدينا** $\text{ر}_1 = \frac{1}{2}$ ، $\text{ر}_2 = \frac{1}{3}$ ، $\text{ح} = 6$

$$\text{س} = \text{ت}^6 \Longrightarrow \text{دس} = 6\text{ت}^5 . \text{دت}$$

$\text{ص} = \text{ص}_1 = \int \frac{6\text{ت}^5 . \text{دت}}{\text{ت}^6 . \left(1 + 2\text{ت}^3 + \text{ت}^2\right)} = \int \frac{6\,\text{دت}}{\text{ت}\left(1 + 2\text{ت}^3 + \text{ت}^2\right)}$ هو تكامل كسري يمكن حله ببساطة إذا كتبنا

$$\text{ص} \int \frac{6\,\text{دت}}{\text{ت}(\text{ت}+1)(2\text{ت}^2 - \text{ت} + 1)} = \left[\int \frac{\text{أ}}{\text{ت}} . \text{دت} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ت}+1} . \text{دت} + \int \frac{\text{جـت} + \text{د}}{2\text{ت}^2 - \text{ت} + 1} . \text{دت}\right.$$

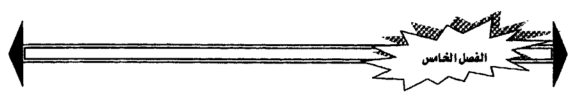
وبالتعويض نجد أن $\text{د} = \frac{3}{2}$ ، $\text{جـ} = -9$ ، $\text{ب} = \frac{-3}{2}$ ، $\text{أ} = 6$

$$\text{ص} = \int \frac{6\,\text{دت}}{\text{ت}(\text{ت}+1)(2\text{ت}^2 - \text{ت} - 1)} = 6.\int \frac{\text{دت}}{\text{ت}} + \left(\frac{-3}{2}\right) \int \frac{\text{دت}}{\text{ت}+1} + \int \frac{-9\text{ت}}{\text{ت}+1} . \text{دت} + \int \frac{9\text{ت} + \frac{3}{2}}{2\text{ت}^2 - \frac{1}{2} - \text{ت} + 1} . \text{دت}$$

$$= 6 . \text{لو}_\text{هـ}\,\text{ت} - \frac{-3}{2}\,\text{لو}_\text{هـ} . (\text{ت}+1) + \int \dots$$

بالنسبة للتكامل الأخير نجد أن:





$$\int \frac{-9\text{ت}+\frac{3}{2}}{2\text{ت}^{2}-\text{ت}+1}\text{دت}=\frac{-9}{2}.\int \frac{\text{ت}-\frac{1}{6}}{\text{ت}^{2}-\frac{1}{2}\text{ت}+\frac{1}{2}}.\text{دت}=\frac{-9}{2}+\left[\frac{1}{2}\int \frac{2\text{ت}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\text{ت}^{2}-\frac{1}{2}\text{ت}+\frac{1}{2}}.\text{دت}\right.$$

$$\frac{-9}{4}.\int \frac{2\left(\text{ت}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}}{\text{ت}^{2}-\frac{1}{2}\text{ت}+\frac{1}{2}}\text{دت}=\frac{-9}{4}\left[\frac{2\text{ت}-\frac{1}{2}\text{دت}}{\text{ت}^{2}-\frac{1}{2}\text{ت}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}.\int \frac{\text{دت}}{\text{ت}^{2}-\frac{1}{2}\text{ت}+\frac{1}{2}}\right]$$

ب-التكاملات من الشكل:

$$\text{ص}=\int \text{ح}\left(\text{س}\left(\frac{\text{ا س}+\text{ب}}{\text{ا}_1\text{س}+\text{ب}_1}\right)^{\text{ر}_1}،\ldots،\left(\frac{\text{ا س}+\text{ب}}{\text{ا}_1\text{س}+\text{ب}_1}\right)^{\text{ر}_\text{ن}}\right).\text{دس}$$

سنفرض الآن تغيراً للمتحول $\text{ت}^{\text{ح}}=\frac{\text{ا س}+\text{ب}}{\text{ا}_1\text{س}+\text{ب}_1}$ حيث ح هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الأعداد الكسرية ر_1، ... ، $\text{ر}_\text{ن}$.

الآن نحصل على:

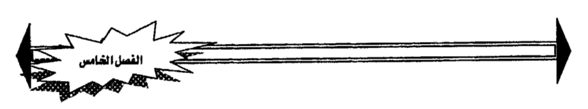
$$\text{ا س}+\text{ب}=\text{ا}_1\text{ت}^{\text{ح}}\text{س}+\text{ب}_1\text{ت}^{\text{ح}}\Leftarrow \text{س}=\frac{\text{ب}_1\text{ت}^{\text{ح}}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ا}.\text{ت}^{\text{ح}}}\Leftarrow \text{دس}=\psi(\text{ت}).\text{دت}$$

حيث ψ(ت) تابعاً كسرياً.

الآن بتعويض قيمة دس، س في التكامل نجد أن:

$\text{ص}=\int \text{ح}\left(\frac{\text{ب}-\text{ب}_1\text{ت}^{\text{ح}}}{\text{ا}_1\text{ت}^{\text{ح}}-\text{ا}}،\text{ت}^{\text{ل}}،\ldots،\text{ت}^{\text{ل}_\text{ن}}\right)\psi(\text{ت})\text{دت}$ ونحصل بذلك على تكامل كسري حيث ل_1، ... ، $\text{ل}_\text{ن}$ أعداد طبيعية.

مثال: $\text{ص}=\int \frac{\sqrt{\text{س}-1}-\sqrt{\text{س}-1}}{\sqrt{\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}+1}}$



في الواقع يمكن كتابة التكامل بالشكل: $ص = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{س-1}{س+1}}}{1 + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}}} . دس$

الآن سنفرض أن $ت^2 = \frac{س-1}{س+1} \Leftarrow س = \frac{ت^2+1}{1-ت^2} \Leftarrow دس = \frac{4ت}{(1-ت^2)^2} . دت$

الآن سوف ندخل المتحول ت إلى التكامل:

$$ص = \int \frac{1-ت}{1+ت} . \frac{4ت}{(1-ت^2)^2} = \int \frac{4ت . دت}{(1-ت)(1+ت)^3}$$

وهو تكامل كسري يمكن حله وذلك بتفريق الكسر أولاً فيصبح لدينا:

$$\int \frac{دت}{(1-ت)(1+ت)} . دت = \int \frac{أ_1}{1-ت} . دت + \int \frac{ب_1}{(1+ت)^3} دت + \frac{ب_2}{(1+ت)^2} دت + \int \frac{ب_3}{1+ت} . دت$$

وبإجراء مطابقة نجد أن $أ_1 = 1/2$ ، $ب_1 = -2$، $ب_2 = 1$ ، $ب_3 = 1/2$

$$\Leftarrow \int \frac{4ت}{(1-ت)(1+ت)^3} . دت = \frac{1}{2} . لو_هـ ت + (-2) \frac{1}{(-2)(1+ن)^2} + \frac{-1}{1+ت} + \frac{1}{2} . لو(1+ت) + جـ$$

$$= \frac{1}{2} . لو_هـ ت + \frac{1}{(1+ت)^2} - \frac{1}{1+ت} + \frac{1}{2} . لو_هـ (1+ت) + جـ$$

٢- التكاملات التي تحل وفق تحويلات أولر:

وهي تكاملات من الشكل $\int ح\left(س، \sqrt{م س^2 + ب س + جـ}\right) . دس$

حيث م، ب، جـ $\in$ ح ونميز من أجله ثلاث حالات هامة:

أ- عندما يكون م>٠ عندئذ سنفرض التحويل من الشكل





$\sqrt{أس^2+بس+جـ} = \sqrt{أ}.س+ت$ ويسمى هذا التحويل تحويل أولر الأول.

الآن بتربيع الطرفين للتحويل نجد أن:

$أس^2+بس+جـ = أس^2+2\sqrt{أ}.س ت+ت^2$

حيث ψ(ت) تابعاً كسرياً $س=\frac{ت^2-جـ}{ب-2\sqrt{أ}ت} \Leftarrow دس=\psi(ت).دت$

عندئذٍ بتعويض المتحول دس، س في التكامل:

$ص=\int ح\left(\frac{ت^2-جـ}{ب-2\sqrt{أ}ت}، \left[\sqrt{أ}.\left(\frac{ت^2-جـ}{ب-2\sqrt{أ}ت}\right)+ت\right]\right)\psi(ت)دت$ والأخير هو تكامل كسري.

مثال: $ص=\int\frac{س\ دس}{\sqrt{س^2+س+1}}$ بملاحظة أن تحويل أولر الأول يصبح في هذه الحالة كون $أ=1>0$

عندئذ بفرض $س+ت=\sqrt{س^2+س+1} \Leftarrow س^2+س+1=س^2+2س.ت+ت^2$

$\Leftarrow س=\frac{ت^2-1}{1-2ت} \Leftarrow دس=\frac{-2ت^2+2ت+2}{(1-2ت)^2}.دت$

$\Leftarrow ص=\frac{\frac{ت^2-1}{1-2ت}}{\left(\frac{ت^2-1}{1-2ت}\right)}.\frac{-2ت^2+2ت+2}{(1-2ت)^2}.دت=\int\frac{-2(ت^2-1)(ت^2-ت-1)}{(-ت^2+ت-1)(1-2ت)^2}.دت$

والأخير هو تكامل كسري نكامله كما ورد معنا في التوابع الكسرية. الأمر الذي نترك إكماله للقارئ.



ب- تحويل أولر الثاني: يكون هذا التحول من أجل التكامل $\int \text{ح}\left(\text{س}، \sqrt{\text{أ}\text{س}^{٢}+\text{ب}\text{س}+\text{جـ}}\right).\text{دس}$ في حالة $\text{جـ}>٠$

من أجل هذه الحالة نجري $\sqrt{\text{أ}\text{س}^{٢}+\text{ب}\text{س}+\text{جـ}}=\text{س}\text{ت}+\sqrt{\text{جـ}}$

$$\Leftarrow \text{أ}\text{س}^{٢}+\text{ب}\text{س}+\text{جـ}=\text{س}^{٢}\text{ت}^{٢}+٢\sqrt{\text{جـ}}\,.\text{س}\text{ت}+\text{جـ}\Leftarrow \text{س}=\frac{٢\sqrt{\text{جـ}}.\text{ت}-\text{ب}}{\text{أ}-\text{ت}^{٢}}$$

$\Longleftarrow$ $\text{دس}=\psi(\text{ت})\,.\,\text{دت}$ حيث $\psi(\text{ت})$ تابعاً كسرياً.

الآن بتعويض المتحول الجديد في التكامل نجد أن

$$\text{ص}=\int \text{ح}\left(\frac{٢\sqrt{\text{جـ}}.\text{ت}-\text{ب}}{\text{أ}-\text{ت}^{٢}}، \frac{٢\sqrt{\text{س}}.\text{ت}-\text{ب}}{\text{أ}-\text{ت}^{٢}}.\text{ت}+\sqrt{\text{جـ}}\right)\psi(\text{ت}).\text{دت}$$

مثال: $\text{ص}=\int\frac{\text{دس}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}+١}}$ نلاحظ أن $\text{جـ}=١>٠$ يمكن استخدام تحويل أولر الثاني من أجل هذا التكامل: $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}+١}=\text{س}\text{ت}+١$

$\text{س}^{٢}+\text{س}+١=\text{س}^{٢}\text{ت}^{٢}+٢\text{س}\,\text{ت}+١ \Longleftarrow \text{س}(\text{ت}^{٢}-١)=٢\text{ت}-١$

$$\text{س}=\frac{٢\text{ت}-٢}{\text{ت}^{٢}-١}\Leftarrow \text{دس}=\frac{-٢\text{ت}^{٢}+٢\text{ت}-٢}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}.\text{دت}$$

الآن بإدخال ت إلى التكامل نجد أن $\text{ص}=\int\frac{\frac{-٢\text{ت}^{٢}+٢\text{ت}-٢}{(\text{ت}^{٢}-\text{ت})^{٢}}}{\frac{٢\text{ت}-١}{\text{ت}^{٢}-١}+\left(\frac{٢\text{ت}-١}{\text{ت}^{٢}-١}\right).\text{ت}+١}.\text{دت}$

بعد الإصلاح $=\int\frac{-٢(\text{ت}^{٢}-\text{ت}-١)}{(\text{ت}^{٢}-١)(٣\text{ت}^{٢}+٣\text{ت}-٢)}.\text{دت}$

والأخير تكامل كسري يمكن حله وفق ما درسناه سابقاً في تكامل التوابع الكسرية الأمر الذي نتركه للقارئ.

جـ- تحويل أولر الثالث: إذا كانت المعادلة $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$ تملك جذرين مختلفين مثل $\text{س}_٢$، $\text{س}_١$ عندئذ يمكن الكتابة $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{أ}(\text{س}-\text{س}_١)(\text{س}-\text{س}_٢)$

من أجل هذه الحالة سنكتب التكامل:

$$\text{ص} = \int \text{ح}\left(\text{س}، \sqrt{\text{أ}(\text{س}-\text{س}_١)(\text{س}-\text{س}_٢)}\right).\text{دس} = \int \text{ح}\left(\text{س}، (\text{س}-\text{س}_١).\sqrt{\frac{\text{س}-\text{س}_٢}{\text{س}-\text{س}_١}}\right).\text{دس}$$

وعندها سنفرض أن $\text{ت}^2 = \frac{\text{س}-\text{س}_٢}{\text{س}-\text{س}_١} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{س}_٢\text{ت}^2-\text{س}_١}{\text{ت}^2-١}$

حيث $\psi(\text{ت})$ تابع كسري $\text{دس} = \psi(\text{ت})\,.\,\text{دت}$

$$\Leftarrow \text{ص} = \int \text{ح}\left(\frac{\text{س}_٢\text{ت}^2-\text{س}_١}{\text{ت}^2-١}، \left[\left(\frac{\text{س}_٢\text{ت}^2-\text{س}_١}{\text{ت}^2-١}\right)-\text{س}_١\right]\right).\psi(\text{ت}).\text{دت}$$

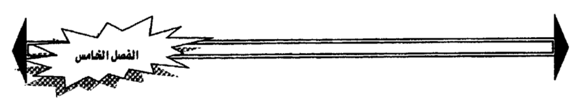
وهذا الأخير هو تكامل كسري.

مثال:

$\text{ص} = \int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}^2+٣\text{س}+٢}}$ الآن نلاحظ أن $\text{س}^2 + ٣\text{س} + ٢ = (\text{س}+١)(\text{س}+١)$

$$\text{ص} = \int \frac{\text{س}+١}{(\text{س}+١)\sqrt{\frac{\text{س}+٢}{\text{س}+١}}}.\text{دس} = \int \sqrt{\frac{\text{س}+١}{\text{س}+٢}}.\text{دس}$$ سنفرض أن $\text{ت}^2 = \frac{\text{س}+١}{\text{س}+٢}$

$$\text{س}\,\text{ت}^2 + ٢\text{ت}^2 = \text{س}+١ \Leftarrow \text{س} = \frac{١-٢\text{ت}^2}{\text{ت}^2-١} \Leftarrow \text{دس} = \frac{٢\text{ت}}{(\text{ت}^2-١)^2}.\text{دت}$$



ص=∫ت. $\frac{٢ت}{(ت^{٢}-١)}$.دت=∫ $\frac{٢ت^{٢}}{(ت^{٢}-١)^{٢}}$ والأخير تكامل كسري يحل وفق ما درسناه في مكاملة التوابع الكسرية.

٣- تكامل ثنائي الحد التفاضلي:

تعريف: تعرف التابع ق(س)= س^{م}(ا س^{ن}+ب)^{ر} حيث م، ن، ر ∈ ك بثنائي حد تفاضلي.

الجدير بالذكر أن تشيبتشيف برهن على أن التكامل:

ص=∫س^{م} (ا س^{ن}+ب)^{ر}.دس

يكون قابلاً للمكاملة فقط في الحالات الثلاثة التالية:

١. إذا كانت ر ∈ ص أي ر عدداً صحيحاً.

٢. إذا كانت $\frac{م+١}{ن}$∈ص

٣. إذا كان $\frac{م+١}{ن}$+ر∈ص

وفي غير هذه الحالات الثلاث السابقة برهن تشيبتشيف أن هذا التكامل لا يقبل التعبير عنه بدلالة توابع أولية - أي لا يمكن مكاملته.

الآن سوف نتعرف على طريقة مكاملة لكل حالة على حدة.

١- إذا كانت ر ∈ ص فإننا سنميز حالتان:

أ- ر>٠ عندئذ يمكن نشر المقدار (ا س^{ن}+ب)^{ر} وفق منشور الكرخي - نيوتن ليصبح لدينا (ا س^{ن}+ب)^{ر}= ا$_{١}$س^{ل١}+ ... + ا



وبالتالي يصبح لدينا شكل التكامل بالصيغة

$\int س^{م}(أس^{ن}+ب)^{ر}.دس = \int س^{م}(أ_{1}س^{ل_{1}}+...+أ).دس$

$= \int أ_{1}س^{ر_{1}}+...+أس^{م}.دس$ ولدينا بالتالي م، ... م و٢، و١ أعداد كسرية.

وتصبح مكاملة أي حد منها بالشكل $\int س^{ر}.دس = \frac{س^{ر+1}}{ر+1}$

ب- ر<٠ عندئذ سنفرض س= $ت^{ب}$ حيث ب هو المضاعف المشترك الأصغر لمقام م، ن عندئذ دس= ب. $ت^{ب-1}$. دت

ويصبح شكل التكامل $ص = \int ت^{ن_{1}}.(أت^{ن_{2}}+ب)^{ر}.بت^{ب-1}.دت$

حيث ($ن_{2}$)، ($ن_{1}$)، (ب-١) أعداد صحيحة.

وبالتالي وباعتبار ر<٠ يمكن إيجاد عدد مثل ي بحيث ي= -ر ليصبح بذلك

$ص = \int \frac{ب.ت^{ن_{1}+ب-1}}{(أت^{ن_{2}}+ب)^{ي}}$

والأخير هو تكامل كسري.

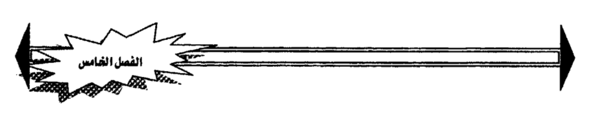
٢- إذا كان $\frac{م+1}{ن} \in ص$ في التكامل $\int س^{م}(أس^{ن}+ب)^{ر}$

وذلك بفرض $ر = \frac{ل}{ي}$ ، $ن = \frac{\dot{ن}}{و}$ ، $م = \frac{\dot{م}}{ر}$ وذلك لأن م، ن، ر ∈ ك

سنجري في هذه الحالة تغييراً للمتحول بالشكل $أس^{ن}+ب = ت^{ك}$

حيث ك هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد ي، و، ر

فيصبح لدينا $س^{ن} = \frac{ت^{ك}-ب}{أ} \Leftarrow س = \left(\frac{ت^{ك}-ب}{أ}\right)^{\frac{1}{ن}}$



الآن يمكن إيجاد دس بالشكل $دس = \frac{١}{ن} . \left(\frac{ت^{ك} - ب}{أ}\right)^{\frac{١}{ن} - ١} . ك ت^{ك-١} . دت$

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل المطلوب

$$ص = \int \left(\frac{ت^{ك} - ب}{أ}\right)^{\frac{م}{ن}} . ت^{ر ل} . \frac{١}{ن} . \left(\frac{ت^{ك} - ب}{أ}\right)$$

$$= \frac{ك}{ن} . \int \left(\frac{ت^{ك} - ب}{أ}\right)^{\frac{م+١}{ن} - ١} . ت^{ر ل + ك - ١} . دت$$

وباعتبار أن $\frac{م+١}{ن} \in ص \Leftarrow \frac{م+١}{ن} - ١ \in ص$

وبالتالي يوجد عدد صحيح لنفرض أنه ب بحيث $\frac{م+١}{ن} - ١$ وبالتالي يصبح شكل التكامل:

$ص = \frac{ك}{ت أ^{ب}} \int ت^{ر ل + ك - ١} (ت^{ك} - ب)^{ب} . دت$ وبالتالي فنحن هنا أمام الحالة الأولى.

٣- إذا كانت $\frac{م+١}{ن} + ر \in ص$ من أجل التكامل $ص = \int س^{م} (أ س^{ن} + ب)^{ر}$ عندئذ سنجري أولاً الإجراء التالي:

$$ص = \int س^{م} . س^{ن ر} (أ + ب س^{-ن})^{ر} . دس = \int س^{م + ن ر} (أ + ب س^{-ن})^{ر} . دس$$

الآن سنفرض أن $ت^{ك} = أ + ب س^{-ن}$ حيث ك هي المضاعف المشترك الأصغر لمقام كلاً من الأعداد م، ن، ر فيصبح لدينا:

$$س = \left(\frac{ت^{ك} - أ}{ب}\right)^{\frac{١}{ن}} \Leftarrow دس = \frac{-١}{ن} . \left(\frac{ت^{ك} - أ}{ب}\right)^{\frac{١}{ن} - ١} . ك ت^{ك-١} . دت$$



وبالتالي يصبح لدينا التكامل:

$$ص = \int \left(\frac{ت^{ك} - أ}{ب}\right)^{-\frac{1}{ن}(م+ن ر)} . ت^{ل} - \frac{1}{ن} . \frac{ك}{ر} . ت^{\frac{1}{ن}-1} . ك ت^{ك-1} . دت$$

$$= \int \frac{-ك}{ن . ر} . ت^{ل+ك-1} \left(\frac{ت^{ك} - أ}{ب}\right)^{-(\frac{م+1}{ن}+ر)} دت$$ وباعتبار أن $\frac{م+1}{ن} + ر \in ص$

فيمكن عندها كتابة التكامل $ص = \frac{-ك}{ن ر ب^{ع+}} \int (ت^{ك} - أ)^{ع} . دت$ ونحن هنا أمام الحالة الأولى أو تكامل كسري.

مثال وتطبيق: احسب كلاً من التكاملات التالية:

١- $ص_1 = \int س^{2/3} . (س^{1/3} + 1)^{2} . دس$

٢- $ص_2 = \int س^{1/2} . (س^{-1/3} + 2)^{-2} . دس$

٣- $ص_3 = \int س^{5/2} . (س^{-1/2} + 1)^{1/2} . دس$

٤- $ص_4 = \int س^{-2} . (1 + س^{-1})^{1/5} . دس$

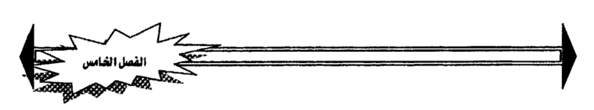
٥- $ص_5 = \int س^{1/2} . (2 + س^{3/2})^{-1/2} . دس$

٦- $ص_6 = \int س^{1/3} . (س^{8/3} + 1)^{1/2} . دس$

الحل:

١- نلاحظ من أجل التكامل $ص_1 = \int س^{2/3} . (س^{1/3} + 1)^{2} . دس$ أن $ر = 2 \in ص^{+}$ عندئذٍ سنكتب التكامل:

$$ص_1 = \int س^{2/3} . (س^{1/3} + 1)^{2} . دس = \int س^{2/3} . (س^{2/3} + 2س^{1/3} + 1) . دس$$



$$= \int \text{س}^{١٣/٦} + ٢\text{س}^{١١/٦} + \text{س}^{٣/٢} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{١٣}{٦}+١}}{\frac{١٣}{٦}+١} + \frac{٢\text{س}^{\frac{١١}{٦}+١}}{\frac{١١}{٦}+١} + \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}+١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{١٩/٦}}{\frac{١٩}{٦}} + \frac{\text{س}^{١٧/٦}}{\frac{١٧}{١٢}} + \frac{\text{س}^{٥/٢}}{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$$

٢- نلاحظ أنه من أجل $\text{ص}_٢ = \int \text{س}^{١/٢}.(\text{س}^{-١/٣}+٢)^{-٢}.\text{دس}$ أن $\text{ر} = -٢ \in \text{ص}^{-}$

وهذه الحالة الأولى بذلك سنفرض أن $\text{س} = \text{ت}^٦$ حيث ٦ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٢، ٣ فيصبح لدينا $\text{دس} = ٦\text{ت}^٥.\text{دت}$

$$\text{ص}_٢ = \int \text{ت}^٣.((\text{ت}^٢)^{-١}+٢)^{-٢}.٦\text{ت}^٥.\text{دت} = ٦.\int \text{ت}^٨.\left(\frac{١}{\text{ت}^٢}+٢\right)^{-٢}.\text{دت} = ٦.\int \frac{\text{ت}^٨}{(١+\text{ت}^٢)^٢}.\text{دت}$$

والأخير هو تكامل كسري. نتركه للقارئ.

٣- الآن من أجل التكامل $\text{ص}_٣ = \int \text{س}^{٥/٢}.(\text{س}^{-١/٢}+١)^{١/٢}.\text{دس}$

الآن سنلاحظ أن $\text{ر} = \frac{١}{٢} \notin \text{ص}$ فهو ليس من الحالة الأولى.

لذلك سنلاحظ أن $\text{ن} = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{م} = \frac{٣}{٢} \Rightarrow \frac{\text{م}+١}{\text{ن}} = \frac{\frac{٣}{٢}+١}{\frac{-١}{٢}} = -٥ \in \text{ص}$

لذلك سنفرض أن $\text{ت}^٢ = \text{س}^{-١/٢}+١ \Rightarrow ٢\text{ت}.\text{دت} = \frac{-١}{٢}.\text{س}^{-٣/٢}.\text{دس}$

$\text{دس} = -٤.\text{ت}.\text{س}^{٣/٢}.\text{دت} \Rightarrow \text{س}^{-١/٢} = \text{ت}^٢-١ \Rightarrow \text{س} = (\text{ت}^٢-١)^{-٢}$



$\Longleftarrow$ دس= -٤ت. (ت^{٢}-١)$^{-٣}$. دت

الآن بتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

ص$_{٣}$ = ∫(ت^{٢}-١)$^{-٣}$.ت.-٤ت.(ت^{٢}-١)$^{-٣}$.دت

= -٤∫ $\frac{ت^{٢}}{(ت^{٢}-١)^{٦}}$.دت وهو تكامل كسري نتركه للقارئ.

٤- الآن من أجل التكامل ص$_{٤}$=∫س$^{-٢}$.(١+س$^{-١}$)$^{١/٥}$.دس

بملاحظة أن ر=$\frac{١}{٥}$∉ ص إذن فالتكامل ليس من الحالة الأولى.

وبملاحظة أن م= -١، ن= -١ ⇐ $\frac{م+١}{ن}$=$\frac{-١}{-١}$=١∈ص

وبالتالي فنحن أمام الحالة الثانية:

عندئذٍ فإننا سنجري تغييراً للمتحول ١+س$^{-١}$= ت^{٥}

$\Longleftarrow$ س$^{-١}$= ت^{٥}-١ $\Longleftarrow$ س= (ت^{٥}-١)$^{-١}$

$\Longleftarrow$ دس= -١(ت^{٥}-١)$^{-٢}$ × ٥ت^{٤} . دت

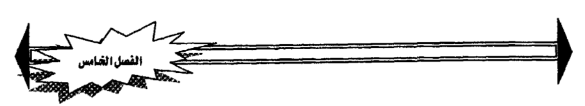
الآن بالتعويض في التكامل:

ص$_{٤}$ = ∫(ت^{٥}-١)^{٢}.ت.(-١)(ت^{٥}-١)$^{-٢}$×٥ت^{٤}.دت

= ∫-٥ت^{٥}.(ت^{٥}-١)$^{٢-٢}$.دت= -٥∫ت^{٥}.دت= -٥.$\frac{ت^{٦}}{٦}$+جـ

٥- الآن من أجل التكامل ص$_{٥}$=∫س$^{١/٢}$.(٢+س$^{٣/٢}$)$^{-١/٢}$.دس

نلاحظ أننا أمام الحالة الثانية لأن ر=$\frac{-١}{٢}$∉ص، $\frac{م+١}{ن}$=$\frac{٣/٢}{٣/٢}$=١∈ ص



عندئذٍ سنفرض أن $٢ + س^{٢/٣} = ت^{٢}$

$$س = (ت^{٢} - ٢)^{٣/٢} \Longrightarrow دس = \frac{٢}{٣}(ت^{٢} - ٢)^{-١/٣} \times ٢ت.دت$$

$$ص_{٠} = \int (ت^{٢} - ٢)^{١/٣}.ت^{-١}.\frac{٢}{٣}.٢ت = \int (ت^{٢} - ٢)^{-١/٤}.دت = \frac{٤}{٣}.\int دت = \frac{٤}{٣}ت + جـ$$

٦- من أجل التكامل $ص_{١} = \int س^{١/٣}.(س^{٨/٣} + ١)^{١/٢}.دس$ نلاحظ أن

$ر = \frac{١}{٢}$ ، $م = \frac{١}{٣}$ ، $ن = \frac{٨}{٣}$ والتكامل ليس من الحالة الأولى $ر = \frac{١}{٢} \notin ص$ وليس من الحالة الثانية لأن $\frac{م+١}{ن} = \frac{٤/٣}{٨/٣} = \frac{١}{٢} \notin ص$ وبملاحظة أن

$\frac{م+١}{ن} + ر = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١ \in ص$ فنحن إذن أمام الحالة الثالثة.

لذلك فإننا أولاً سنكتب التكامل بالشكل:

$$ص_{١} = \int س^{١/٣}.س^{٤/٣}.(١ + س^{-٨/٣})^{\frac{١}{٢}}.دس = \int س^{٥/٣}(١ + س^{-٨/٣})^{١/٢}.دس$$

ثم سنفرض أن $ت^{٦} = ١ + س^{-٨/٣} \Longrightarrow س = (ت^{٦} - ١)^{-٣/٨}$

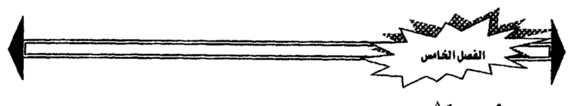
$$\Longrightarrow دس = \frac{-٣}{٨}.(ت^{٦} - ١)^{-١١/٨}.٦ت^{٥}.دت$$

عندئذ سنكتب التكامل:

$$ص_{١} = \int (ت^{٦} - ١)^{-٥/٨}.ت^{٣}.\frac{-٣}{٨}(ت^{٦} - ١)^{-١١/٨}.٦ت^{٥}.دت$$

$$= \int \frac{-٩}{٤}.ت^{٨}.(ت^{٦} - ١)^{-١٦/٨}.دت$$

$$= \int \frac{-٩}{٤}.ت^{٨}.(ت^{٦} - ١)^{-٢}.دت$$



$$= \frac{-9}{4} \int \frac{\text{ت}^{8}}{(\text{ت}^{6}-1)^{2}} . \text{دت}$$

والأخير هو تكامل كسري.

التكاملات المثلثية

تعريف: نقول عن التكامل أنه تكاملاً مثلثياً إذا كان التكامل يحوي جا س أو جتا س أو ظا س أو ظتا س.

وبملاحظة أن التابعين ظا س، ظتا س يمكن التعبير عنهما بدلالة جتا س، جا س عندئذٍ يمكن التعبير عن التكامل المثلثي بالشكل:

$$\text{ص} = \int \text{ح}(\text{جاس}،\ \text{جتاس}) . \text{دس}$$

في الواقع فإن التكاملات المثلثية يمكن إرجاعها إلى تكاملات كسرية أو تكامل ثنائي الحد التفاضلي في غالب الأحيان وذلك وفق التحويلات العامة المثلثية والتي سنوردها بالشكل:

التحويلات العامة المثلثية: $\text{جاس} = \text{جا}\,2 . \frac{\text{س}}{2} = 2 . \text{جا}\frac{\text{س}}{2} . \text{جتا}\frac{\text{س}}{2}$

الآن بضرب المقدار وقسمته على $\text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}$ نجد أن: $\text{جاس} = \frac{2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}}{1+\text{ظا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}$

ولدينا أيضاً $\text{جتاس} = \frac{1-2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}}{1+\text{ظا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}$ الآن إذا أجرينا التبديل $\text{ظا}\frac{\text{س}}{2} = \text{ت}$ عندئذٍ


فإن

$$جاس = \frac{٢ت}{١+ت^٢} \quad ، \quad جتاس = \frac{١-ت^٢}{١+ت^٢}$$

أما من أجل د س فنلاحظ أن قوسظات$= \frac{س}{٢}$

$\Leftarrow$ س$=$٢ قوسظات $\Leftarrow$ دس$= \frac{٢دت}{١+ت^٢}$ وهكذا إذا أردنا إراء التحويل العام المثلثي سوف نكتب:

$$جاس = \frac{٢ت}{١+ت^٢} \quad ، \quad جتاس = \frac{١-ت^٢}{١+ت^٢} \quad ، \quad دس = \frac{٢دت}{١+ت^٢}$$

أمثلة شهيرة: أوجد كلاً من التكاملات المثلثية التالية:

١- $\int \frac{دس}{جاس}$ ٢- $\int \frac{دس}{جتاس}$ ٣- $\int \frac{دس}{جاس+ﺃ}$

٤- $\int \frac{دس}{ﺃجاس+ب\ جتاس}$ ٥- $\int جا^٣س.\ جتاس.دس$

الحل:

من أجل التكامل $\int \frac{دس}{جاس}$ فإنه إجراء التحويل المثلثي العام نجد أن

$$ص = \int \frac{\frac{٢دت}{١+ت^٢}}{\frac{٢ت}{١+ت^٢}}$$

$$= \int \frac{دت}{ت} = لو_ﻫ ت + جـ = لو_ﻫ \left(ظا \left(\frac{س}{٢} \right) \right) + جـ$$

٢- من أجل التكامل $\int \frac{دس}{جتاس}$



نجد أن $ص=\int \frac{دس}{جتاس}=\int \frac{٢دت/١+ت^٢}{١-ت^٢/١+ت^٢}$

$$=\int \frac{٢دت}{١-ت^٢}=٢.\frac{١}{٢}.لو_هـ\left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)جـ= لو_هـ\left(\frac{١-ظا(س/٢)}{١+ظا(س/٢)}\right)+جـ$$

٣- من أجل التكامل $\int \frac{دس}{أجاس+ب\ جتاس}$ بإجراء التحويل المثلثي العام نجد أن:

$$ص=\int \frac{٢دت/١+ت^٢}{\frac{٢ت}{١+ت^٢}+\frac{ب(١-ت^٢)}{١+ت^٢}}=\int \frac{٢دت}{-ب ت^٢+٢أت+ب}$$

والأخير هو تكامل كسري. قد درسناه سابقاً.

٥- الآن من أجل $ص=\int جا^٣س.\ جتاس.دس$

يمكن الفرض $ت=جاس \Leftarrow دت=\ جتادس \Leftarrow دس=\frac{دت}{جتاس}$

عندئذٍ $ص=\int ت^٣.دت=\frac{ت^٤}{٤}جـ=\frac{جا^٤س}{٤}+جـ$

حالة خاصة ومهمة في التكامل المثلثي:

$ص=\int جا^مس.\ جتا^ن س.دس$

الآن بفرض أننا عوضنا ت= جاس $\Longleftarrow$ دت= جتاس دس

$\Longleftarrow ص=\int ت^م.\ جتا^{ن-١}س.دت$

لكن جتا س= $(١-\ جا^٢\ ت)^{١/٢}$

عندئذٍ فإن $ص=\int ت^م.(١-ت^٢)^{\frac{ن-١}{٢}}.دت$

والتكامل الأخير كما نعلم هو تكامل ثنائي حد تفاضلي. ويكون هذا التكامل قابلاً للمكاملة إذا كان:

١- $\frac{\text{ر}-١}{٢} \in \text{ص}$

٢- $\frac{\text{م}+١}{٢} \in \text{ص}$

٣- $\frac{\text{م}+\text{ر}}{٢} = \frac{\text{م}+١}{٢} + \frac{\text{ر}-١}{٢} \in \text{ص}$

وفي غير هذه الحالات فإن هذا التكامل "حسب تشيبتشيف" لا يمكن التعبير عنه بدلالة توابع أولية "أو" أن هذا التابع غير قابل للمكاملة.

خلاصة القول: يمكن حل التكامل $\int \text{جا}^{\text{م}}\text{س} . \text{جتا}^{\text{ر}}\text{س} . \text{دس}$ في حالات ثلاثة فقط:

١- $\frac{\text{ر}-١}{٢} \in \text{ص}$

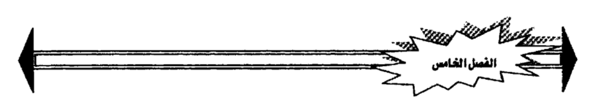
٢- $\frac{\text{م}+١}{٢} \in \text{ص}$

٣- $\frac{\text{م}+\text{ر}}{٢} \in \text{ص}$

ولا يمكن حله في غير هذه الحالات.

ملاحظة هامة: أن التبديلات العامة المثلثية وكما سبق وأن ذكرنا ترُد أي تكامل مثلثي إلى تكامل كسري أو تكامل ثنائي حد تفاضلي.

لكن التبديلات العامة في غالب الأحيان تعطي كسوراً ذات درجات كبيرة وليست سهلة لذلك سنكتب فيما يلي بعضاً من التحويلات الخاصة.



التحويلات المثلثية الخاصة:

بفرض لدينا التكامل ص=∫ح(جاس، جتاس).دس عندئذ سوف نميز ثلاث حالات:

أ- إذا كان ح (-جا س، جتا س)= -ح(جا س، جتا س)

عندئذ سنفرض أن ت= جتا س ونجري التكامل عندها بصورة أبسط.

مثال: ص=∫جا^{٣}س. جتا^{٢}س.دس

الآن بملاحظة أن:

ح(-جا س، جتا س)= (-جا س)^{٣} . جتا س= -جا^{٣}س . جتا$^{-٢}$س= -ح(جا س، جتا س).

عندئذٍ فإنه بإجراء التحويل ت= جتا س ⟸ دت= - جا س دس ⟸

$$دس=\frac{-دت}{جاس}$$

وبالتعويض في التكامل نجد أن:

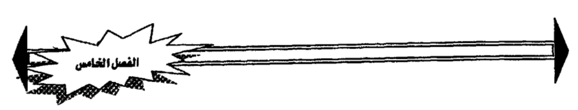
ص=∫-جا^{٢}س.ت^{٢}.دت=-∫(١-ت^{٢})ت^{٢}.دت=-∫ت^{٢}-ت^{٤}.دت

$$=-\left[\frac{ت^{٣}}{٣}-\frac{ت^{٥}}{٥}\right]+جـ=-\left[\frac{جتا^{٣}س}{٣}-\frac{جتا^{٥}س}{٥}\right]+جـ$$

مثال: ص=∫$\frac{جتا^{٤}س}{جا^{٣}س}$.دس **الآن بملاحظة أن:**

$$ح(-جاس،\ جتاس)=\frac{جتا^{٤}س}{(-جاس)}=-\frac{جتا^{٤}س}{جا^{٣}س}=-ح(جاس،\ جتاس)$$





عندئذ سوف نجري التحويل جتا س= ت ⟸ دت= -جاس . دس ⟸

$$\text{دس} = -\frac{\text{دت}}{\text{جاس}}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$$\text{ص} = \int \frac{-\text{ن}^{٤}}{\text{جا}^{٤}\text{س}}\,\text{دت} = -\int \frac{\text{ت}^{٤}}{(١-\text{ت}^{٢})^{٢}}.\text{دت}$$

الآن من أجل التكامل الأخير نجري عملية قسمة حدودية $\text{ت}^{٤}$ على $(١-\text{ت}^{٢})^{٢}$ ونحله كتكامل كسري.

مثال: $\text{ص} = \int \frac{\text{جاس. جتا}^{٢}\text{س}}{١+\text{جا}^{٤}\text{س}}.\text{دس}$ **الآن سنلاحظ أن:**

$$\text{ح}(-\text{جاس، جتاس}) = \frac{\text{جاس. جتا}^{٤}\text{س}}{١+\text{جا}^{٤}\text{س}} = -\text{ح}(\text{جاس، جتاس})$$

لذلك سنجري التحول جتاس= ت ⟸ $\text{دس} = \frac{-\text{دت}}{\text{جاس}}$ وبالتالي يصبح التكامل:

$$\text{ص} = \int \frac{-\text{ت}^{٢}}{١+(١-\text{ت}^{٢})^{٢}}.\text{دت}$$ وهو تكامل كسري.

ب- إذا كان لدينا ح(جا س، -جتا س)= -ح(جا س، جتا س).

سنفرض في هذه الحالة أن جا س= ت ونحل التكامل.

مثال: $\text{ص} = \int \text{جتا}^{٥}\text{س.جا}^{٢}\text{س.دس}$ **نلاحظ أن**

$\text{ح}(\text{جا س، -جتا س}) = -\text{جتا}^{٥}\text{ س . جا}^{٢}\text{ س} = -\text{ح}(\text{جا س، جتا س})$

عندئذ سنفرض أن جا س= ت ⟸ $\text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جتاس}}$



وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$$\text{ص} = \int \text{جتا}^{4}\text{ت}^{2}.\text{دت} = \int (1-\text{ت}^{2})^{2}.\text{ت}^{2}.\text{دت} =$$

$$= \int \text{ت}^{2} - 2\text{ت}^{4} + \text{ت}^{6}.\text{دت} = \frac{\text{ت}^{3}}{3} - \frac{2}{5}\text{ت}^{5} + \frac{\text{ت}^{7}}{7} + \text{جـ} = \frac{\text{جا}^{3}\text{س}}{3} - \frac{2}{3}.\text{جا}^{5}\text{س} + \frac{\text{جا}^{7}\text{س}}{7} + \text{جـ}$$

مثال: $\text{ص} = \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{1+\text{جا}^{2}\text{س}}$ نلاحظ أن ح(+جا س، −جتا س)= −ح(جا س، جتا س).

سنفرض من أجل ذلك أن جا س= ت $\text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جتاس}}$ عندئذ يصبح التكامل:

$\text{ص} = \int \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{1+\text{ت}^{2}}.\text{دت} = \int \frac{1-\text{ت}^{2}}{1+\text{ت}^{2}}.\text{دت}$ والأخير يحل ببساطة بالشكل:

$$\text{ص} = \int \frac{1-\text{ت}^{2}}{1+\text{ت}^{2}}.\text{دت} = -\int \frac{\text{ت}^{2}-1+2-2}{\text{ت}^{2}+1}.\text{دت} = -\int 1 - \frac{2}{\text{ت}^{2}+1}.\text{دت} = -\text{ت} + 2\,\text{قوس ظا ت} + \text{جـ}$$

$$= -\,\text{جاس} + 2\,\text{قوس ظا}\,(\text{جاس}) + \text{جـ}$$

مثال: $\int \text{جتا}^{7}\text{س}.\text{دس}$ سنلاحظ مباشرة أن ح(جا س، −جتا س)= −ح(جا س، جتا س) عندئذ سوف نفرض جا س= ت $\Longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جتاس}}$

$$\text{ص} = \int \text{جتا}^{6}\text{س}.\text{دت} = \int (1-\text{ت}^{2})^{3}.\text{دت} = \int 1 - 3\text{ت}^{2} + 3\text{ت}^{4} + \text{ت}^{6}.\text{دت}$$

$$= \text{ت} - \text{ت}^{3} + \frac{3}{5}\text{ت}^{5} + \frac{\text{ت}^{7}}{7} + \text{جـ} = \text{جاس} - \text{جا}^{3}\text{س} + \frac{3}{5}\text{جا}^{5}\text{س} + \frac{\text{جا}^{7}\text{س}}{7} + \text{جـ}$$

مثال: $\text{ص} = \int \frac{\text{جاس}+1}{\text{جتاس}.\text{جا}^{2}\text{س}}.\text{دس}$ نلاحظ أن ح(جا س، −جتا س)= ح(جا س، جتا س) عندئذ سوف نفرض ت= جا س $\Longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جتاس}}$ ويصبح التكامل:



$$ص=\int\frac{ت+١}{ت^{٢}.\ جتا^{٢}س}.دت=\int\frac{ت+١}{ت^{٢}(١-ت^{٢})}.دت=\int\frac{ت+١}{ت^{٢}(١-ت)(١+ت)}.دت=\int\frac{دت}{ت^{٢}(١-ت)}$$

والأخير تكامل كسري بسيط. نترك حله للقارئ.

جـ- إذا كان لـدينا ح(-جـا س، جتـا س)= ح(جـا س، جتـا س) عندئـذ سنفرض إما ت= ظاس أو ت= ظتا ت ونكمل التكامل.

مثال: $ص=\int\frac{جا^{٣}س}{جتا^{٣}س}.دس$

الحل: سنلاحظ أن ح(-جا س، -جتا س)= ح(جـا س، جتـا س) عندئـذ سوف نفرض أن ت= ظاس ⟸ $دت=\frac{دت}{جتا^{٢}س}$ ⟸ دس= $جتا^{٢}س$. دت

الآن يصبح لدينا التكامل

$$ص=\int\frac{جا^{٣}س}{جتا^{٣}س}.دس=\int ظاس جا^{٢}س دس=\int ت.جا^{٢}س.\ جتا^{٢}س.دت$$

الآن بضرب ما داخل التكامل وقسمته على $جتا^{٤}س$ نجد أن:

$ص=\int ت^{٣}.(\ جتاس)^{٤}.دت=\int\frac{ت^{٣}}{(١+ت^{٢})^{٢}}.دت$ والأخير هو تكامل كسري

مثال: $ص=\int ظاس.دس$ **نلاحظ أن:**

$$ح(-جاس،-\ جتاس)=\frac{-\ جاس}{-\ جتاس}=ظاس=ح(جاس،\ جتاس)$$

عندئذ سوف نعوض ت= ظاس ⟸ دس= $جتا^{٢}س$. دت

ويصبح التكامل:

$$ص=\int ت.\ جتا^{٢}س.دت=\int\frac{ت}{١+ت^{٢}}.دت=\frac{١}{٢}.\ لو_{هـ}(١+ت^{٢})+جـ$$



$$\text{ص}=\frac{1}{2}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}+\text{جـ}=-\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{جتاس}+\text{جـ}$$

مثال: $\text{ص}=\int\frac{\text{جاس. جتاس}}{1+\text{جا}^{4}\text{س}}\text{دس}$ **بملاحظة أن** $\text{ح}(-\text{جا س، }-\text{جتا س})=\text{ح}(\text{جا س، جتا س})$ **وسنفرض ذلك أن ظاس= ت** $\Leftarrow$ **دس= جتا^{2}س . دت**

$$\text{ص}=\int\frac{\text{ظاس. جتا}^{2}\text{س}}{\left(\frac{1}{\text{جتا}^{4}\text{س}}+\text{ظا}^{4}\text{س}\right)\text{جتا}^{4}\text{س}}.\text{دس}=\int\frac{\text{ظاس}}{\left(\frac{1}{\text{جتا}^{4}\text{س}}+\text{ظا}^{4}\text{س}\right)}.\frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن: $\text{ص}=\int\frac{\text{ت}}{(\text{ت}+\text{ت}^{2}+\text{ت}^{4})}.\text{دت}$

وهو تكامل كسري يمكن حله وفق ما تعلمنا سابقاً.

مثال: $\int\frac{\text{دس}}{\text{جا}^{6}\text{س}}$ **نلاحظ أن** $\text{ح}(-\text{جا س، }-\text{جتا س})=\text{ح}(\text{جا س، جتا س})$.

وسنجد أن ظاس= ت مناسب لإجراء التكامل وسنكتب $\text{دس}=\frac{\text{دت}}{1+\text{ت}^{2}}$ **ونعوض ما حصلنا عليه في التكامل وذلك بملاحظة أن**

$$\text{جا}^{2}\text{س}=\frac{\text{ظا}^{2}\text{س}}{1+\text{ظا}^{2}\text{س}}\Leftarrow\text{ص}=\int\frac{\text{دت}/1+\text{ت}^{2}}{(\text{ت}^{2}/1+\text{ت}^{2})^{3}}=\int\frac{(1+\text{ت}^{2})^{2}}{\text{ت}^{6}}.\text{دت}$$

هو تكامل كسري بسيط.

أخيراً: إذا كان التكامل المثلثي لدينا لا يخضع لأي من حالات التحويل الخاص الثلاثة فإنه عندئذٍ لابد من استخدام التحويلات العامة أو تحويلاً خاصاً بالحالة التي بين يدينا وعلى كل حال فإن مسألة إجراء التحويلات والحدس بفائدتها من عدمه تأتي بعد التوفيق من الله تعالى من الخبرة وكثرة حل المسائل.

مثال: أجد س التحويل المناسب لكلاً من التكاملات المثلثية التالية وبين إلى ماذا يؤول مع التحليل؟



١- $ص = \int \frac{دس}{١ + جتاس}$ إن التحويل المناسب هنا هو التحويل المثلثي العام. كون هذا التكامل لا يخضع إلى أي من حالات التحويل الخاص ويؤول إلى تكامل تابع كسري.

٢- $ص = \int \frac{دس}{جاس + جتاس}$ إن التحويل المناسب هو التحويل العام لعدم خضوع هذا التكامل لأي من حالات التكامل الخاص ويؤول إلى تكامل تابع كسري.

٣- $ص = \int \frac{دس}{\sqrt{جاس}}$ إن هذا التابع غير قابل للمكاملة لأنه باعتبار فإنه

$ص = \int جاس^{\frac{-١}{٢}} . جتا^{٠}س.دس$

١. $\frac{ر-١}{٢} = \frac{٠-١}{٢} = \frac{-١}{٢} \notin ص$ ٢. $\frac{م+١}{٢} = \frac{-١/٢+١}{٢} = \frac{-١}{٤} \notin ص$

٣. $\frac{م+ر}{٢} = \frac{-١/٢+٠}{٢} = \frac{-١}{٤} \notin ص$

وبالتالي حسب "تشيبتشيف" فإن التابع غير قابل للمكاملة.

٤. $\int جاس. جتا^{-٢/٣}س.دس$ سنجري هذا التحول جتا س= ت وذلك لأن ح(-جا س، جتا س)= -ح(جا س، جتا س) وسيرد إلى تكامل بسيط من الشكل $\int ت^{٢/٣}.دت$

٥. $\int \frac{جا^٣س}{جتاس+١}.دس$ من أجل هذا التكامل سنجري التحويل جتاس= ت

لأن ح(-جا س، جتا س)= -ح(جا س، جتا س).

وسيرد إلى تكامل كسري.



٦. $\int \frac{\text{جاس . جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{2}\text{س}}$.دس سنجري هنا التحويل ظاس= ت وذلك لأن ح(−جاس، −جتاس)= ح(جاس، جتاس).

وسيرد هذا التكامل إلى تكامل كسري.

٧. $\int \sqrt{\text{ظاس}}$.دس سنفرضهنا التحويل ظاس= ت كون ح(−جاس، −جتاس) = ح (جاس، جتاس).

وسيرد هذا التكامل إلى تكامل ثنائي حد تفاضلي.

تمهيد: ناقشنا إلى حد الآن تكاملات مثلثية تكون فيها أمثال س موحدة لدى جميع التوابع جتاس، جاس ونريد الآن مناقشة الحالات التي يكون فيها أمثال مختلفة لـ س داخل التوابع المثلثية مثل: $\int \frac{\text{جاس}}{1+\text{جا}^{2}\text{س}}$.دس

١- جا اس.جاب س $= \frac{1}{2}$[جتا(ا−ب).س− جتا(ا+ب).س]

٢- جا اس. جتاب س $= \frac{1}{2}$[جا(ا+ب).س−جا(ا−ب).س]

٣- جتا اس. جتاب س $= \frac{1}{2}$[جتا(ا+ب).س− جتا(ا−ب).س]

٤- جا٢س= ٢. جاس. جتاس

٥- جتا٢س= جتا^{2}س − جا^{2}س

مثال: أوجد كلاً من التكاملات التالية:

١- ص$_{1}$ = ∫جا٨س.جا٧س.دس

٢- ص$_{2}$ = ∫جا٣س. جتا١١س.دس

٣- ص$_{٣}$ = ∫جاس.جا٣س.جا٥س.دس   ٤- ص$_{٤}$ = ∫جتا٤س. جتا٣س.دس

٥- ص$_{٥}$ = ∫ $\frac{\text{١+جا(س / ٢)}}{\text{جاس}}$ دس

الحل:

١- نجد أن ص$_{١}$ = ∫جا٨س.جا٧س.دس = $\frac{١}{٢}$∫[جتاس − جتا١٥س].دس

= $\frac{١}{٢}$[جاس − $\frac{١}{١٥}$جا١٥س] + جـ

٢- ص$_{٢}$ = ∫جا٣س. جتا١١س.دس = $\frac{١}{٢}$∫[جا١٤س+جا٨س].دس

= $\frac{١}{٢}$[− $\frac{١}{١٤}$ جتا١٤س − $\frac{١}{٨}$ جتا٨س] + جـ

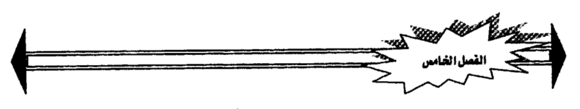
٣- ص$_{٣}$ = ∫جاس.جا٣س.جا٥س.دس = ∫جاس[$\frac{١}{٢}$(جتا٢س − جتا٨س)].دس

= $\frac{١}{٢}$[∫جاس. جتا٢س.دس − ∫جاس. جتا٨س.دس] = $\frac{١}{٢}$[$\frac{١}{٢}$.∫[جا٣س + جاس]دس − $\frac{١}{٢}$∫[جا٩س+جا٧س]دس]

ص$_{٣}$ = $\frac{١}{٤}$∫[جاس+جا٣س+جا٧س+جا٩س.دس]

= $\frac{١}{٤}$.(− جتا − $\frac{١}{٣}$. جتا٣س − $\frac{١}{٧}$. جتا٧س − $\frac{١}{٩}$ جتا٩س) + جـ

٤- ص$_{٤}$ = ∫جتا٤س. جتا٣س.دس



نلاحظ أن $ص_٤ = \int$ جتا٤س. جتا٣س.دس $= \int \frac{١}{٢}$ [جتا٧س + جتاس]دس

$$= \frac{١}{٢} . \left[\frac{١}{٧} جا٧س + جاس \right] + جـ$$

٥- $ص_٥ = \int \frac{١+جا(س/٢)دس}{جاس}$ الآن يمكننا الكتابة

$$ص_٥ = \int \frac{١+جا(س/٢)دس}{٢جاس/٢ \ جتاس/٢}$$

يمكن الفرض مبدئياً أن $\frac{س}{٢}$=ت $\Longleftarrow$ دس= ٢. دت

$\frac{١+جات}{جات \ جتات}$.دت وبملاحظة أن التكامل الأخير يخضع للعلاقة:

ح(جات، -جتات)= -ح(جات، جتات).

عندئذ سنفرض أن جات= ع ونكمل التكامل.

خلاصة الأمر في حالة وجود أمثال مختلفة لـ س في التابع المثلثي داخل التكامل عندئذ يجب العمل على جعل هذا التابع بأمثال موحدة لـ س ثم نفرض هذه الأمثال ٍس= ت ونعوض في اكامل المثلثي ونتابع على التكامل الأخير ما تعلمناه في تكامل التوابع المثلثية.

أخيراً سوف نتعرض إلى تكامل توابع عبارة عن جداء توابع مثلثية وحدوديات وهي من الشكل:

ص= $\int$ر$_ن$ (س). جتا ٍس.دس　　　　ص= $\int$ر$_ن$ (س).جا ٍس.دس

في الواقع من أجل ص يبرهن على أنه:



ص = ∫ ر$_{ن}$ (س). جتا م س. د س = ك$_{ن}$ (س). جتا م س + ك$_{ن-1}$ (س). جا م س + جـ

حيث ك$_{ن}$(س)، حدودية من الدرجة ن ذات أمثال غير معينة.

و ك$_{ن-1}$(س) حدودية أخرى من الدرجة (ن-1) ذات أمثال غر معينة أيضاً.

ولتعيين أمثال هاتين الحدوديتان علينا أن نشتق العلاقة (*) ونجري مطابقة وبهذا نكون قد أنهينا حساب هذا التكامل ص.

ومن أجل ص لدينا:

ص = ∫ ر$_{ن}$ (س). جتا م س. د س = ك$_{ن}$ (س). جا م س + ك$_{ن-1}$ (س). جتا م س + جـ

وأيضاً بنفس الطريقة نشتق العلاقة السابقة ونجري المطابقة ونكون بذلك قد أنهينا حساب التكامل.

مثال: احسب كلاً من التكاملين:

١- ص = ∫(س^{٢}+١). جاس. دس

٢- ص = ∫(س+٢). جتاس. دس

الحل:

١- سنكتب العلاقة:

∫(س^{٢}+١). جاس. دس = (أس^{٢}+ب س+جـ). جتاس + (دس+و). جاس

الآن نشتق العلاقة:

(س^{٢}+١). جـاس = (٢ م س+ب). جتـاس - (+ م س^{٢} + ب س + جـ) + جاس + د - جاس + (د. س + و). جتاس.

(س^{2}+١). جـاس= (٢ ﻫ س+ دس+ ب+ و). جتـاس + (- ﻫ س^{2} - ب س - جـ + د). جاس

(س^{2}+١). جاس= ((٢ ﻫ + د). س + (ب + و). جتـاس + (- ﻫ س^{2} - ب س - جـ + د) جاس

٢ ﻫ + د = ٠
ب + و = ٠
- ﻫ = ١ ⟸ ﻫ = -١ ، ب = ٠ ، جـ = ١ ، د = ٢ ، و = ٠
- ب = ٠
- جـ + د = ١

∫(س^{2}+١)جاس.دس=(-س^{2}+١). جتاس+(٢س) جاس+جـ

الآن من أجل ٢ نجد أن:

∫(س+٢). جتاس.دس=(ﻫ س+ب)جاس+جـ جتاس

الآن باشتقاق العلاقة السابق والإصلاح نجد أن:

(س+٢). جتاس= (٥ ﻫ.س + ٥ب). جتاس + (ﻫ -٥جـ). جاس

٥ ﻫ = ١
٥ب = ٢ ⟸ ﻫ = $\frac{1}{5}$ ، ب = $\frac{2}{5}$ ، جـ = $\frac{1}{25}$
ﻫ - ٥جـ = ٠

وبالتالي ∫(س+٢). جتاس.دس=$\left(\frac{1}{5}س+\frac{2}{5}\right)$.جاس+ $\frac{1}{25}$ جتاس+جـ

التكاملات القطعية: وهي التكاملات ذات الشكل

∫ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س).دس



أولاً: سنكتب قوانين خاصة للتوابع القطعية.

١- المطابقة الأساسية جتا^{2}(قطع) س – جا^{2}(قطع)س = ١

٢- ظا^{2}(قطع)س – ١ = $\frac{1}{\text{جتا}^{2}(\text{قطع})\text{س}}$

٣- جتا^{2}(قطع)س – ١ = $\frac{-1}{\text{جا}^{2}(\text{قطع})\text{س}}$

٤- قوانين جمع الزوايا

جا(قطع) (أ+ب)س= جا(قطع) أس. جتا(قطع) ب س+ جتا(قطع) أس. جا(قطع) ب س

جا(قطع) (أ–ب)س= جا(قطع) أس. جتا(قطع) ب س– جتا(قطع) أس. جا(قطع) ب س

جا(قطع) (أ+ب)س= جتا(قطع) أس. جتا(قطع) ب س+ جتا(قطع) أس. جا(قطع) ب س

جا(قطع) (أ+ب)س= جتا(قطع) أس. جتا(قطع) ب س– جتا(قطع) أس. جا(قطع) ب س

٥- قوانين تحويل الجداء إلى جمع=

جا(قطع)أس.جا(قطع)ب س= $\frac{1}{2}$[جتا(قطع) (أ–ب)س– جتا(قطع)(أ+ب).س]

جا(قطع)أس. جتا(قطع)ب س= $\frac{1}{2}$[جا(قطع) (أ+ب)س–جا(قطع)(أ–ب).س]

جتا(قطع)أس.جا(قطع)ب س= $\frac{1}{2}$[جتا(قطع) (أ+ب)س+ جتا(قطع)(أ–ب).س]

جتا (قطع)٢س= ٢جا(قطع)س. جا(قطع)س

جتا(قطع)٢س= جتا^{٢}(قطع)س + جا^{٢}(قطع)س

٦- جا(قطع) ٢س= ٢جا(قطع)س . جتا(قطع)س

٧- جتا(قطع)٢س= جتا^{٢}(قطع)س + جا^{٢}(قطع)س

إن إجراء تكاملات التوابع القطعية تتم بواسطة إحدى ثلاث طرق:

١- التبديلات العامة القطعية.

٢- التبديلات الخاصة القطعية.

٣- حالات خاصة ومهمة.

١- التبديلات العامة القطعية:

وتتم بافتراض ظا(قطع)$\frac{س}{٢}$=ت وبملاحظة أن

$$جا(قطع)س=٢جا(قطع)\frac{س}{٢}.جتا(قطع)\frac{س}{٢}=٢\frac{ظا(قطع)س/٢}{ظا^{٢}س-١}=\frac{٢ت}{ت^{٢}-١}$$

وذلك بضرب المقدار وقسمته على جتا^{٢}(قطع)$\frac{س}{٢}$=ت

$$جتا(قطع)س=جتا^{٢}(قطع)\frac{س}{٢}.جا^{٢}(قطع)\frac{س}{٢}=\frac{١+ظا^{٢}(قطع)\frac{س}{٢}}{ظا^{٢}(قطع)\frac{س}{٢}-١}=\frac{ت^{٢}+١}{ت^{٢}-١}$$

وأخيراً لدينا $\frac{٢دت}{ت^{٢}-١}$



خلال القول: إذا فرضنا ظا(قطع)$\frac{س}{٢}$=ت فإنه يصبح لدينا

$$جا(قطع)س=\frac{٢ت}{ت^{٢}-١} \quad ، \quad جتا(قطع)س=\frac{ت^{٢}+١}{ت^{٢}-١} \quad ، دس=\frac{٢دت}{ت^{٢}-١}$$

مثال: احسب التكاملين:

$$ص=\int\frac{دس}{جتا(قطع)س} \quad ، \quad ص=\int\frac{دس}{جا(قطع)س}$$

الحل:

في الواقع إنه من أجل ص سنطبق التبديلات القطعية العامة لنحصل على

$$ص=\int\frac{٢دت/ت^{٢}-١}{٢ت/ت^{٢}-١}=\int\frac{دت}{ت}= لو_{ه}+جـ= لو_{ه}\left(ظا(قطع)\frac{س}{٢}\right)+جـ$$

أما من أجل ص وبإجراء التبديلات القطعية العامة نجد أن:

$$ص=\int\frac{٢دت/ت^{٢}-١}{ت^{٢}+١/ت^{٢}-١}=\int\frac{٢دت}{١+ت^{٢}}=٢\ قوس ظا ت+جـ=٢\ قوس ظا\left(ظا(قطع)\frac{س}{٢}\right)+جـ$$

مثال: ك=$\int$جا^{٢}(قطع)س. جتا^{٣}(قطع)س.دس

الآن بإجراء التبديلات القطعية العامة نجد أن:

$$ك=\int\left(\frac{٢ت}{ت^{٢}-١}\right)^{٢}\left(\frac{ت^{٢}+١}{ت^{٢}-١}\right)^{٣}\left(\frac{٢دت}{ت^{٢}-١}\right)=\int\frac{٨ت^{٢}(ت^{٢}+١)^{٣}}{(ت^{٢}-١)^{٦}}.دت$$

والأخير هو تكامل كسري.

ملاحظة هامة: إن التبديلات القطعية ترد أي تكامل قطعي إلى تكامل صحيح أو كسري أو ثنائي حد تفاضلي لكن التبديلات العامة أحياناً نعطي



كسوراً من درجات عليا وذات تكاملات طويلة الحل لذلك ستعرض فيما يلي تحويلات أخرى وفق حالات خاصة.

٢- التبديلات القطعية الخاصة:

أ- إذا كان لدينا ح(-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

عندئذ نفرض جتا(قطع)س= ت ونجري تكاملاً كسرياً في غالب الأمر.

مثال: احسب كلاً من التكاملات التالية:

١- $\text{ص} = \int \text{جا}^{٣}\text{(قطع)س} . \text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س} . \text{دس}$

٢- $\text{ص} = \int \frac{\text{جتا}^{٤}\text{(قطع)س}}{\text{جا}^{٣}\text{(قطع)س}} . \text{دس}$

٣- $\text{ص} = \int \frac{\text{جا(قطع)س} . \text{جتا}^{٣}\text{(قطع)س}}{١ + \text{جا}^{٤}\text{(قطع)س}} . \text{دس}$

الحل:

من أجل ١- نجد أن التكامل $\text{ص} = \int \text{جا}^{٣}\text{(قطع)س} . \text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س} . \text{دس}$ يحقق أن ح(-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= $-\text{جا}^{٣}\text{(قطع)س} . \text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س}$ = -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

عندئذ سوف نفرض ت= جتا(قطع)س ⟸ دت= جا(قطع)س. دس $\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جا(قطع)س}}$

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$$\text{ص}=\int \text{جا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}.\text{ت}^{٢}.\frac{\text{د ت}}{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}}=\int \text{ت}^{٢}.\text{جا}^{٢}(\text{قطع})\text{س}.\text{ل ت}=\int \text{ت}^{٢}.(\text{ت}^{٢}+١)\text{دت}$$

$$=\int(\text{ت}^{٤}+\text{ت}^{٢})\text{دت}=\frac{\text{ت}^{٥}}{٥}+\frac{\text{ت}^{٣}}{٣}+\text{جـ}=\frac{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}^{٥}}{٥}+\frac{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}^{٣}}{٣}+\text{جـ}$$

من أجل ٢- نجد أن التكامل $\int \frac{\text{جتا}^{٤}(\text{قطع})\text{س}}{\text{جا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$ يحقق أن ح(-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

لذلك سوف نفرض أن ت= جتا (قطع)س $\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}}$

$\text{ص}=\int\frac{\text{ت}^{٤}.\text{دت}}{\text{جا}^{٤}(\text{قطع})\text{س}}=\int\frac{\text{ت}^{٤}.\text{دت}}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}$ وهو تكامل كسري.

من أجل ٣- نجد أن التكامل $\frac{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}.\ \text{جتا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}}{١+\text{جا}^{٤}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$ يحقق أن ح (-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

وسنفرض الآن أن جتا(قطع)س= ت $\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}}$ وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$\text{ص}=\int\frac{\text{ت}^{٣}}{١+(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}.\text{دس}$ والأخير تكامل كسري.

ب- إذا كان لدينا ح(جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

في هذه الحالة سنفرض أن جا(قطع)س= ت $\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}$ ونكمل التكامل.



مثال: احسب كلاً من التكاملات التالية:

١- ص= ∫جتا٥(قطع)س.جا٢(قطع)س.دس

٢- ص=∫ (جتا٣(قطع)س) / (جا٢(قطع)س + ٢) .دس

٣- ص=∫ جتا٧(قطع)س.دس

٤- ص=∫ (جا(قطع)س+١) / (جتا(قطع)س جا٢(قطع)س) .دس

الحل:

مــن أجــل ١- نجــد أن ص= ∫جتا٥(قطع)س.جا٢(قطع)س.دس يحقــق أن ح(+جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

لذلك سنفرض أن جا(قطع)س= ت ⇐دس= دت / جتا(قطع)س

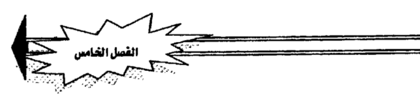
وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

ص=∫(ت٢-١)٢.ت٢.دت=∫ت٦-٢ت٤+ت٢.دت

= ت٧/٧ - ٢/٥ ت٥ + ت٣/٣ + جـ= جا(قطع)س٧/٧ - ٢/٥ جا٥(قطع)س + جا٣(قطع)س/٣ + جـم

ن أجل ٢- نجد أن التكامل ص=∫ جتا٧(قطع)س.دس يحقق أن ح(جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س) لـذلك سـنفرض أن جا(قطع)س= ت ⟸ دت= جتا(قطع)س. دس ⇐دس= دت / جتا(قطع)س





وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل:

$$\text{ص}=\int \text{جا}^{6}(\text{قطع})\text{س}.\text{دت}=\int(\text{ت}^{2}-1)^{3}.\text{دت}=\int \text{ت}^{6}-3\text{ت}^{4}+3\text{ت}^{2}-1.\text{دت}$$

$$=\frac{\text{ت}^{7}}{7}-\frac{3\text{ت}^{5}}{5}+\text{ت}^{3}-\text{ت}+\text{جـ}$$

$$=\frac{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}^{7}}{7}-\frac{3}{5}\text{جا}^{5}(\text{قطع})\text{س}+\text{جا}^{3}(\text{قطع})\text{س}-\text{جا}(\text{قطع})\text{س}+\text{جـ}$$

من أجل ٣- نجد أن التكامل $\text{ص}=\int \text{جتا}^{7}(\text{قطع})\text{س}.\text{دس}$ يحقق العلاقة $\text{ح}(\text{جا}(\text{قطع})\text{س}، -\text{جتا}(\text{قطع})\text{س})=-\text{ح}(\text{جا}(\text{قطع})\text{س}، \text{جتا}(\text{قطع})\text{س})$

لذلك سنفرض أن جا(قطع)س= ت $\Leftarrow$ دت= جتا(قطع)س. دس

$$\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}$$

$\text{ص}=\int \frac{\text{ت}+1}{\text{ت}^{2}(\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}^{2})}\text{دت}=\text{دت}\int \frac{\text{ت}+1}{\text{ت}^{2}(\text{ت}^{2}+1)^{2}}.\text{دت}$ والأخير هو تكامل كسري.

جـ- إذا كان لدينا $\text{ح}(-\text{جا}(\text{قطع})\text{س}، -\text{جتا}(\text{قطع})\text{س})=\text{ح}(\text{جا}(\text{قطع})\text{س}، \text{جتا}(\text{قطع})\text{س})$

عندئذ سوف نفرض أن ظا(قطع)س= ت $\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{2}-1}$ ويرد بذلك التكامل إلى تكامل كسري.

أمثلة: احسب كلاً من التكاملات التالية:

١- $\text{ص}=\int \frac{\text{جا}^{3}(\text{قطع})\text{س}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$ ٢- $\text{ص}=\int \text{ظا}(\text{قطع})\text{س}.\text{دس}$



٣- $\text{ص}=\int \frac{\text{جا(قطع)س. جتا(قطع)س}}{\text{١+ جتا}^{٤}\text{(قطع)س}}.\text{دس}$ ٤- $\text{ص}=\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٦}\text{(قطع)س}}$

الحل: من أجل ١- نجد أن التكامل $\text{ص}=\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{(قطع)س}}{\text{جتا(قطع)س}}.\text{دس}$ محققاً للخاصية

$$\text{ح(-جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)}$$

لذلك سوف نفرض تغييراً في المتحول بالشكل

$$\text{ظا(قطع)س= ت} \Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$$

وبملاحظة أن التكامل يمكن أن يكتب بالشكل:

$$\text{ص}=\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{(قطع)س}}{\text{جتا(قطع)س}}.\text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س.دس}=\int \text{ظا}^{٣}\text{(قطع)س}\frac{١}{\text{ظا}^{٢}\text{(قطع)س}-١}.\text{دس}$$

$$=\int \text{ت}^{٣}\frac{١}{\text{ت}^{٢}-١}.\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}=\int \frac{\text{ت}^{٣}}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}.\text{دت}$$

من أجل ٤- نجد أن $\int \frac{\text{جا(قطع)س+١}}{\text{جتا(قطع)س جا}^{٢}\text{(قطع)س}}.\text{دس}$ يحقق العلاقة

$$\text{ح(جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)}$$

لذلك سنفرض أن جا(قطع)س=ت $\Longleftarrow$ دت= جتا(قطع)س. دس

$$\Leftarrow \text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{جتا(قطع)س}}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\text{ص}=\int \frac{\text{ت+١}}{\text{ت}^{٢}}.\text{دت}=\int \left(\frac{١}{\text{ت}}+\frac{١}{\text{ت}^{٢}}\right)\text{دت}=\text{لو}_{\text{ه}}\text{ت}-\frac{١}{\text{ت}}+\text{جـ}=\text{لو(جا(قطع)س)}-\frac{١}{\text{جا(قطع)س}}+\text{جـ}$$



جـ- إذا كان لـدينا $\text{ح}(-\text{جا(قطع)س}، -\text{جتا(قطع)س}) = \text{ح}(\text{جا(قطع)س}، \text{جتا(قطع)س})$

عندئذ سنفرض إما ظا(قطع)س= ت أو ظتا(قطع)س= ت وبعد ذلـك يـرد التكامل إلى تكامل كسري في غلب الأمر.

أمثلة:

١- $\text{ص} = \int \frac{\text{جا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$

٢- $\text{ص} = \int \text{ظا}(\text{قطع})\text{س}.\text{دس}$

٣- $\text{ص} = \int \frac{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}.\ \text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}{١+\text{جا}^{٤}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$

٤- $\text{ص} = \int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٦}(\text{قطع})\text{س}}$

الحل:

الآن من أجل ١- نلاحظ أن التكامل $\text{ص} = \int \frac{\text{جا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}.\text{دس}$

يحقق $\text{ح}(-\text{جا(قطع)س}، -\text{جتا(قطع)س}) = \text{ح}(\text{جا(قطع)س}، \text{جتا(قطع)س})$

وبالتالي فإننا سوف نفرض أن ظا(قطع)س= ت $\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{جتا}^{٢}(\text{قطع})\text{س}}$

الآن بالتعويض في التكامل نجد أن:

$\text{ص} = \int \text{جتا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}.\ \text{جتا}(\text{قطع})\text{س}.\text{دت} = \int (\text{ظا}^{٣}(\text{قطع})\text{س}).\ \text{جتا}^{٤}(\text{قطع})\text{س}.\text{دس}$

$= \int \text{ت}^{٣}\left(\frac{١}{\text{ت}^{٢}-١}\right)^{٢}\text{دت} = \int \frac{\text{ت}^{٣}}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}.\text{دت}$ والأخير هو تكامل كسري.

الآن من ٢- نجد أن التكامل $\text{ص} = \int \text{ظا}(\text{قطع})\text{س}.\text{دس}$ يحقق الخاصية

$\text{ح}(-\text{جا(قطع)س}، -\text{جتا(قطع)س}) = -\text{ح}(\text{جا(قطع)س}، \text{جتا(قطع)س})$



عندئذ سوف نفرض ت= ظا(قطع)س $\Leftarrow$ $\text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$

ونعوض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن:

$$\text{ص}=\int \text{ت}.\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}=\int\frac{\text{ت}}{\text{ت}^{٢}-١}\text{دت}=\frac{١}{٢}.\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ت}^{٢}-١)+\text{جـ}$$

$$=\frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{ظا}^{٢}(\text{س})\right)+\text{جـ}$$

من أجل ٣- نجد أن التكامل $\text{ص}=\int\frac{\text{جا(قطع)س.ظا(قطع)س}}{١+\text{جا}^{٤}\text{(قطع)س}}.\text{دس}$ يحقق أن:

$$\text{ح}(-\text{جا(قطع)س، }-\text{جتا(قطع)س})=\text{ح}(\text{جا(قطع)س، جتا(قطع)س})$$

لذلك سوف نفرض أن ظا(قطع)س= ت $\Leftarrow$ $\text{دس}=\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$ وبملاحظة أن

$$\text{جا}^{٢}\text{(قطع)س}=\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$$

ويكتابة التكامل بالشكل

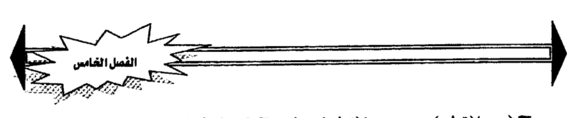
$$\text{ص}=\int\frac{\text{ظا(قطع)س. جتا}^{٢}\text{(قطع).دس}}{\left(\frac{١}{\text{جتا}^{٤}\text{(قطع)س}}+\text{ظا}^{٤}\text{(قطع)س}\right)\text{جتا}^{٤}\text{(قطع)س}}=\int\frac{\text{ظا(قطع)س}(\text{ظا}^{٢}\text{(قطع)س}-١)}{(\text{ظا}^{٢}\text{(قطع)}-١)^{٢}+\text{ظا}^{٤}\text{(قطع)س}}.\text{دس}$$

وبتعويض ما حصلنا عليه في التكامل نجد أن: $\text{ص}=\int\frac{\text{ت}(\text{ت}^{٢}-١)}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}+\text{ت}^{٤}}\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$

$=\int\frac{\text{دت}}{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}+\text{ت}^{٤}}$ والأخير هو تكامل كسري.

من أجل ٤- نجد أن التكامل $\text{ص}=\frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٦}\text{(قطع)س}}$ محققاً للعلاقة





ح(−جا(قطع)س، −جتا(قطع)س)= ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

لذلك سوف نفرض أن ظا(قطع)س= ت ⇐ دس = $\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$

وبملاحظة أن جا^{٢}(قطع)س= $\frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١}$ نجد أن:

ص= $\int \frac{١}{\left(\frac{\text{ت}^{٢}}{\text{ت}^{٢}-١}\right)^{٢}} . \frac{\text{دت}}{\text{ت}^{٢}-١} = \int \frac{(\text{ت}^{٢}-١)^{٢}}{\text{ت}^{٦}}$.دت والأخير هو تكامل كسري.

ملاحظة هامة: إذا لم يحقق التكامل القطعي إحدى حالات التحويل الخاص فإننا سوف نستخدم مباشرة التحويلات العامة القطعية أو تحويل يخص التكامل نفسه وفرض التبديل كما قلنا سابقاً يلزم ك بعد التوفيق من الله تعالى خبرة وممارسة.

حالة خاصة ومهمة في التكاملات ص=∫جا^{ن}(قطع)س. جتا^{م}(قطع)س.دس في الواقع من أجل هذه التكاملات سنفرض أن جتا(قطع)س= ت ⟸ دت= جا(قطع)س. دس وبالتالي يصبح شكل التكامل:

ص=∫ظا$^{ن-١}$س.ت^{م}.دت=∫(ت^{٢}−١)$^{ن-١}$.ت^{م}.دت وهو تكامل ثنائي حد تفاضلي.

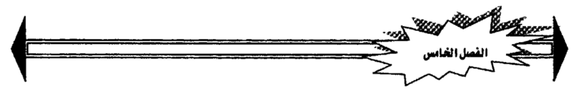
يكون موجوداً ضمن حالات ثلاث:

١- ن−١ ∈ ص أي أن ن ∈ ص

٢- $\frac{\text{م}+١}{٢}$ ∈ص

٣- $\frac{\text{م}+١}{٢}$+ن−١∈ا أي أن $\frac{\text{م}+١}{٢}$+ن∈ص





وفي غير هذه الحالات لا يمكن حساب هذا التكامل حسب تشيبتشيف.

مثال: احسب التكامل $\int$ جتا$^{1/2}$(قطع)س جا$^{1/3}$(قطع)س.دس

بملاحظة أن ن$=\frac{1}{3}$ ، م$=\frac{1}{2}$ عندئذ نلاحظ أن:

١- ن$=\frac{1}{3}\notin$ص

٢- $\frac{م+1}{2}=\frac{3}{4}\notin$ص

٣- $\frac{م+1}{2}+$ن$-1=\frac{1}{12}\notin$ص

وبالتالي فإن حساب هذا التكامل غير ممكن حسب تشيبتشيف.

تبديلات للتوابع القطعية ناتجة من التعريف

في الواقع إذا تذكرنا أن:

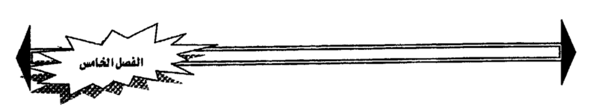
جا(قطع)س$=\frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{2}$ ، جتا(قطع)س$=\frac{هـ^{س}+هـ^{-س}}{2}$

عندئذٍ إذا فرضنا هـ$^{س}=$ ت $\Leftarrow$ دس$=\frac{دت}{ت}$ وبتعويض هذا التحويل في عبارة التكامل نجد أن التكامل سيرد إلى تكامل كسري أو صحيح أو ثنائي حد تفاضلي.

مثال: ص$=\int$ظتا(قطع)س.دس في الواقع نلاحظ أن ص$=\int\frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{2}$.دس

وبإجراء التحويل هـ$^{س}=$ ت $\Leftarrow$ دس$=\frac{دت}{ت}$





وبتعويضه في التكامل:

$$\text{ص} = \int \frac{\text{ت} + (١/\text{ت})}{\text{ت} - (١/\text{ت})} . \frac{\text{دت}}{\text{ت}} = \int \frac{(\text{ت}^{٢}+١)/\text{ت}}{(\text{ت}^{٢}-١)/\text{ت}} . \frac{\text{دت}}{\text{ت}} = \int \frac{\text{ت}^{٢}+١}{\text{ت}(\text{ت}^{٢}-١)} .\text{دس}$$

والأخير هو تكامل كسري.

والآن وكما ناقشنا في التكاملات المثلثية حالة وجود أمثال مختلفة لـ س داخل التابع سنناقش الآن حالة وجود أمثال مختلفة لـ س في التكامل

$\int \text{ح}(\text{جا(قطع)س، جتا(قطع)س}).\text{دس}$

وفي هذه الحالة سوف نناقش هذه الحالة وفق خطوات كالتالي:

١- ولأ سنسعى إلى توحيد هذا الأمثال باستخدام قوانين الجداء المذكورة في الصفحة.

٢- نحاول إيجاد التكامل وفق ما تعلمنا.

مثال:

١- $\text{ص}_{١} = \int \text{جا(قطع)٨س.جا(قطع)٧س.دس}$

٢- $\text{ص}_{٢} = \int \text{جا(قطع)٣س. جتا(قطع)١١س.س.دس}$

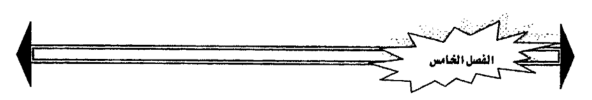
٣- $\text{ص}_{٣} = \int \text{جتا(قطع)٤س. جتا(قطع)٣س.دس}$

٤- $\text{ص}_{٤} = \int \frac{١+\text{جا(قطع)}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{جا(قطع)س}} .\text{دس}$

الحل:

١- سنضع نصب أعيننا العلاقة:





جا(قطع)٨س.جا(قطع)٧س $=\frac{١}{٢}$ [جتا(قطع)س − جتا(قطع)١٥س] وبالتالي:

ص١ $=\frac{١}{٢}\int$ [جتا(قطع)س − جتا(قطع)١٥س] $=\frac{١}{٢}$.[جا(قطع)س − $\frac{\text{جتا(قطع)١٥س}}{١٥}$] + جـ

٢- يمكن أن يكتب بالشكل:

ص٢ $=\frac{١}{٢}\int$ [جا(قطع)س −جا(قطع) (−٨س).دس $=\frac{١}{٢}\int$ [جا(قطع)٤١س +جا(قطع)٨س.دس

$=\frac{١}{٢}$ [$\frac{\text{جتا(قطع)٤١س}}{١٤}$ + $\frac{\text{جتا(قطع)٨س}}{٨}$] + جـ

٣- يمكن كتابته بالشكل:

ص٣ $=\frac{١}{٢}\int$ [جا(قطع)٧س + جتا(قطع)س.دس $=\frac{١}{٢}$ [$\frac{\text{جا(قطع)٧س}}{٧}$ +جا(قطع)س] + جـ

٤- وبملاحظة أن جا(قطع)س=٢جا(قطع) $\frac{س}{٢}$. جتا(قطع) $\frac{س}{٢}$

ص٤ $=\int$ $\frac{\text{١+جا(قطع)} \frac{س}{٢}}{\text{٢جا(قطع)}\frac{س}{٢}\text{. جتا(قطع)}\frac{س}{٢}}$.س

سنفرض الآن أن ت $=\frac{س}{٢}$ $\Longleftarrow$ دس = ٢دت

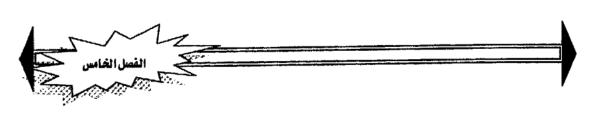
$\Leftarrow$ ص٤ $=\int$ $\frac{\text{١+جا(قطع)ت}}{\text{٢جا(قطع)س. جتا(قطع)س}}$.دت

وهو تكامل قطعي يحقق الخاصية.

ح (جا(قطع)س، −جتا(قطع)س)= −ح (جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

ونناقشه كما ورد معنا سابقاً.





تمارين على التكاملات القطعية:

اكتب التحويلات المناسب لكلاً من التكاملات القطعية التالية وإلى ماذا ستؤول مع التعليل؟

١- $ص_١ = \int \frac{دس}{١ + جتا(قطع)س}$ نلاحظ أنه لا يحقق أياً من حالات التحويل الخاص وبالتالي سيكون من الأيسر إجراء التحويل القطعي العام له وبذلك سيرد إلى تكامل كسري.

٢- $ص_٢ = \int \frac{دس}{جا(قطع)س + جتا(قطع)س}$ في الواقع إذا لاحظنا أن جا(قطع)س + جتا(قطع)س= $هـ^{س}$ عندئذ يصبح التكامل $ص_٢ = \int هـ^{-س}.دس$ وهو تكامل بسيط.

٣- $ص_٣ = \int \frac{دس}{\sqrt{جا(قطع)س}}$ إن هذا التكامل تنطبق عليه حالة $\int جا^{ن}(قطع)س.\ جتا^{م}(قطع)س.دس$ وبذلك إذا لاحظنا أن $ن = \frac{-١}{٢}$، $م = ٠$ وأيضاً لدينا:

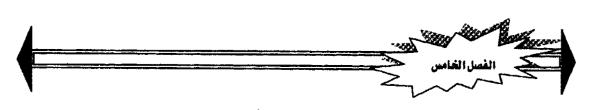
١- $ن = \frac{-١}{٢} \notin ص$

٢- $\frac{م+١}{٢} = \frac{١}{٢} \notin ص$

٣- $\frac{م+١}{٢} + ن - ١ = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} - ١ \in ص$

وهي حالة تشيبتشيف الثالثة وسنفرض تحويلاً من الشكل جا(قطع)س= ٢ $\Leftarrow دس = \frac{دت}{ت^{٢} - ١}$





وسيقلب التكامل إلى $ص_٣ = \int \frac{دت}{(ت^٢ - ١)^{٢/٣}}$ وهو تكامل ثنائي الحد التفاضلي.

٤- $ص_٤ = \int$ جا(قطع)س. جتا$^{٢/٣}$(قطع)س.دس

نلاحظ أن هذا التكامل يحقق ح(-جا(قطع)س، جتا(قطع)س)= -ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س) وبالتالي سيكون التحويل جتا(قطع)س= ت مناسباً.

٥- $ص_٥ = \int \frac{جتا^٣(قطع)س}{جا(قطع)س+١}$.دس سنلاحظ أن ح(-جتا(قطع)س، جا(قطع)س)= -ح(جتا(قطع)س، جا(قطع)س) وبالتالي سيكون التحويل جا(قطع)س= ت مناسباً وسيرد التكامل عندها إلى تكامل كسري.

٦- $ص_٦ = \int$ جا(قطع)س. جتا(قطع)س.دس

على هذا التكامل إذا لاحظنا أن:

جا(قطع)س. جتا(قطع)س= $\frac{جا(قطع)٢س}{٢}$ عندها سيصبح تكاملاً بسيطاً أو بملاحظة أن ح(-جا(قطع)س، -جتا(قطع)س)= ح(جا(قطع)س، جتا(قطع)س)

وافتراض ظا(قطع)س= ت ويصبح التكامل كسرياً.

أو افتراض جا(قطع)س= ت ويصبح تكاملاً صحيحاً.

سنتعرض أخيراً إلى تكاملات قطعية من الشكل:

$ع = \int ر_ن(س)$.جا(قطع)مس.دس ، $ص = \int ر_ن(س)$. جتا(قطع)مس.دس



الآن بالنسبة لـ ص يبرهن على أن:

ص=∫ر ن (س). جتا(قطع)أس.دس=ك ن (س). جتا(قطع)أس+ك ن-١ (س).جا(قطع)أس

حيث كن(س) حدودية من الدرجة (ن) بأمثال غير معينة.

و كن-١(س) حدودية أخرى من الدرجة (ن-١) وبأمثال غير معينة.

ولتعيين هذه الأمثال سوف نشتق الطرفين ونجري مطابقة.

مثال: ص=∫(س+١).جا(قطع)٢س.دس

سنكتب أولاً أن:

ص=∫(س+١).جا(قطع)٢س.دس=(أس+ب). جتا(قطع)٢س+جـ.جا(قطع)(٢س)

وباشتقاق الطرفين نجد أن:

(س+١) . جا(قطع)٢س= (٢أس+٢ب) . جا(قطع)٢س + (أ+٢جـ) . جتا(قطع)٢س.

والمطابقة نجد أن:

أ=١/٢ ، ب=١/٢ ، جـ=١/٤

وبالتالي:

∫(س+١).جا(قطع)٢س.دس=١/٢(س+١). جتا(قطع)٢س-١/٤.جا(قطع)٢س+جـ

أما بالنسبة للتكامل ع فيبرهن على أن:

∫ر ن (س). جتا(قطع)أس.دس=ك ن (س).جا(قطع)أس+ك ن-١ (س). جتا(قطع)أس

وبالتالي إذا أجرينا اشتقاقاً للطرفين ومن ثم مطابقة نحصل على أمثال كن(س)، كن-١(س) وبذلك ننهي حساب التكامل.

مثال: $\text{ص} = \int (\text{س}^{2} + 2) .\ \text{جتا(قطع)س.دس}$

نلاحظ أن:

$\int (\text{س}^{2} + 2) .\ \text{جتا(قطع)س دس} = (\text{أس}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ}) .\text{جا(قطع)س} + (\text{دس} + \text{و})\ \text{جتا(قطع)س}$

الآن باشتقاق الطرفين ومن ثم الإصلاح نجد أن:

$(\text{س}^{2} + 1) .\ \text{جتا(قطع)س} = (\text{أس}^{2} + \text{ب س}) + (\text{جـ} + \text{د}) .\ \text{جتا(قطع)س} + ((2\text{أ} + \text{د}) .\ \text{س} + (\text{ب} + \text{و})\ \text{جا(قطع)س})$

وبالمطابقة نحصل على:

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = 0$ ، $\text{جـ} = \frac{3}{2}$ ، $\text{د} = \frac{-1}{2}$ ، $\text{و} = 0$

وبالتالي:

$\int (\text{س}^{2} + 1) .\ \text{جتا(قطع)س.دس} = (\text{س}^{2} + \frac{3}{2}) .\text{جا(قطع)س} + (\frac{-1}{2}\text{س}) .\ \text{جتا(قطع)س}$ ونكون بذلك قد أجرينا التكامل.

التكاملات الأسية:

نسمي التكامل تكاملاً أسياً إذا كان من الشكل $\int \text{ق}(\text{هـ}^{\text{س}}).\text{دس}$

إن هذه التكاملات ترد إلى تكاملات كسرية أو صحيحة أو تكاملاً لثنائي الحد التفاضلي إذا أجرينا تغييراً للتحول من الشكل $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ت} \Rightarrow \text{دس} = \frac{\text{دت}}{\text{ت}}$

مثال: احسب كلاً من التكاملات الأسية التالية:

١- $\text{ص}_{1} = \int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}} .\text{دس}$ ٢- $\text{ص}_{2} = \int \frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{1 + \text{هـ}^{-2\text{س}}} .\text{دس}$

٣- $ص_{٣}=\int\frac{هـ^{٢س}\ هـ^{٣س}}{هـ^{س}+١}.دس$

٤- $ص_{٤}=\int\frac{١+هـ^{س/٢}}{(١+هـ^{س/٤})^{٢}}.دس$

٥- $ص_{٥}=\int\frac{دس}{\sqrt{هـ^{-س}-١}}$

٦- $ص_{٦}=\int\sqrt{\frac{هـ^{س}+١}{هـ^{س}-١}}.دس$

الحل:

١- سنفرض $هـ^{س}=ت \Leftarrow دس=\frac{دت}{ت}$ ليصبح التكامل

$$ص_{١}=\int\frac{ت^{٢}}{١+ت}.\frac{دت}{ت}=\int\frac{ت.دت}{ت+١}$$

والتكامل الأخير يحل بسهولة بالشكل:

$$ص_{١}=\int\frac{١+ت-١}{ت+١}.دت=\int دت-\int\frac{دت}{١+ت}$$

$$=ت-لو_{هـ}(ت+١)+جـ=هـ^{س}-لو_{هـ}(هـ^{س}+١)+جـ$$

٢- سنلاحظ هنا أن التبديل $هـ^{-س}=ت$ سيكون أنسب من $هـ^{س}=ت$

وعندها يصبح $هـ^{-س}=ت$ والتكامل يتحول إلى:

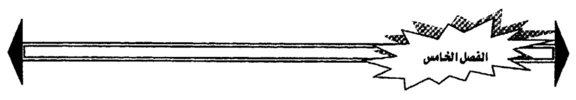
$$ص_{٢}=\int\frac{ت}{١+ت^{٢}}.\frac{-دت}{ت}=-\int\frac{دت}{١+ت^{٢}}=-\text{ قوس ظا}ت+جـ$$

٣- سنفرض $هـ^{س}=ت \Leftarrow دس=\frac{دت}{ت}$ الأمر الذي يجعل التكامل بالشكل:

$$ص_{٣}=\int\frac{ت^{٢}+ت^{٣}}{ت+١}.\frac{دت}{ت}=\int ت.دت=\frac{ت^{٢}}{٢}+جـ=\frac{هـ^{٢س}}{٢}+جـ$$

٤- سنفرض من أجل هذا التكامل أن $هـ^{س/٤}=ت \Leftarrow دس=٤.\frac{دت}{ت}$ وبالتالي:





$ص_4 = \int \frac{1+ت^2}{(1+ت)^2} . 4 \frac{دت}{ت} = 4 . \int \frac{1+ت^2}{ت(1+ت)^2} . دت$ وهو تكامل كسري.

٥- سنفرض أن $ت = هـ^{-س} - 1 \Leftarrow دس = \frac{-دت}{ت}$ وبالتالي:

$$ص_5 = \int \frac{1}{\sqrt{ت}} . \frac{-دت}{ت} = -\int ت^{-3/2} دت = -\frac{ت^{-1/2}}{-1/2} + جـ = 2 . \frac{1}{\sqrt{ت}} + جـ = \frac{2}{\sqrt{هـ^{-س} - 1}} + جـ$$

٦- سنفرض هنا أن $هـ^{س} = ت \Leftarrow دس = \frac{دت}{ت}$ ويصبح التكامل

$$ص_6 = \int \sqrt{\frac{ت+1}{ت-1}} . دت$$

والتكامل يصبح تكاملاً لتابعاً أصم سنفرض أن $\tau^2 = \frac{ت+1}{ت-1}$ ويؤول بعدها التكامل إلى تكامل كسري.

تكاملات صماء خاصة وتوظيف التبديلات المثلثية والقطعية:

لدينا ثلاثة أشكال هامة في هذه الحالة:

١- الشكل الأول: $ص = \int ق\left(\sqrt{أ^2 - س^2}\right) . دس$

سنفرض من أجل هذا الشكل بتديلين للمتحول أحدهما مثلثي والآخر قطعي.

أ- التبديل المثلثي: سنفرض أن س= أجتات أو س= أجات

عندها سيصبح من أجل $س = أ جتات \Longrightarrow دس = -أ جات دت$

ويصبح الجذر بالشكل $\sqrt{أ^2 - أ^2 جتا^2 ت} = أ . جات$

ويصبح بالتالي ص تكاملاً مثلثياً.

ب- التبديل القطعي: سنفرض أن س= أ. ظاس



لأنه عندها $\text{دس} = \frac{\text{م}}{\text{جتا}^{2}(\text{قطع})\text{ت}}.\text{دت}$ ويصبح الجذر بالشكل

$$\sqrt{\text{م}^{2} - \text{م}^{2}\text{ظا}^{2}(\text{قطع})\text{ت}} = \text{م}\sqrt{1 - \text{ظا}^{2}(\text{قطع})\text{ت}} = \frac{\text{م}}{\text{جتا}(\text{قطع})\text{س}}$$

ويرد بذلك التكامل إلى تكامل قطعي.

٢- الشكل الثاني $\text{ص} = \int \text{ق}(\sqrt{\text{م}^{2} + \text{س}^{2}}).\text{دس}$

أ- التبديل المثلثي: $\text{س} = \text{م ظات} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{م}}{\text{جتا}^{2}\text{ت}}.\text{دت}$

ويصبح شكل الجذر:

$$\sqrt{\text{م}^{2} + \text{م}^{2}\text{ظا}^{2}\text{ت}} = \text{م}.\sqrt{1 + \text{ظا}^{2}\text{ت}} = \frac{\text{م}}{\text{جتات}}$$

ويصبح التكامل ص تكاملاً مثلثياً ومثله س= م ظات

ب- التبديل القطعي: س= قوس جتا(قطع) ت $\Longrightarrow$ دس= م. جا(قطع)ت. دت

ويصبح شكل الجذر $\sqrt{\text{م}^{2} + \text{س}^{2}} = \sqrt{\text{م}^{2} + \text{م}^{2}\ \text{جتا}^{2}(\text{قطع})\text{ت}} = \text{م}.\text{جا}(\text{قطع})\text{ت}$

ويصبح ص تكاملاً قطعياً.

٣- الشكل الثالث: $\text{ك} = \int \text{ق}(\sqrt{\text{س}^{2} - \text{م}^{2}}).\text{دس}$

أ- التبديل المثلثي:

$$\text{س} = \frac{\text{م}}{\text{جتات}} \quad \Leftarrow \text{دس} = \frac{-\text{م ظات}}{\text{جتات}}.\text{دت}$$

ويصبح شكل الجذر $\sqrt{\text{س}^{2} - \text{م}^{2}} = \text{م}\sqrt{\frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{ت}} - 1} = \text{م ظات}$ والتكامل ك يصبح تكاملاً مثلثياً.

ب- التبديل القطعي:

$$س = ﻡ جتا(قطع)ت \Longrightarrow دس = ﻡ جا(قطع)ت$$

ويصبح شكل الجذر $\sqrt{س^{٢} - ﻡ^{٢}} = \sqrt{ﻡ^{٢}\ جتا^{٢}(قطع)ت - ﻡ^{٢}} = ﻡ.جا(قطع)ت$

وبالتالي يصبح لـ تكاملاً قطعياً.

مثال: ١- $ص_{١} = \int \sqrt{٤ - س^{٢}}.دس$ ٢- $ص_{٢} = \int \sqrt{١ + س^{٢}}.س.دس$

٣- $ص_{٣} = \int \frac{دس}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$

الحل:

١- من أجل $ص_{١}$ سنفرض أن س= ٢جتات $\Longrightarrow$ -٢جات. دت وبالتالي:

$$ص_{١} = \int \sqrt{٤ - ٤\ جتا^{٢}}.-٢جات.دت = -٤\int جا^{٢}ت.دت$$

$$= -٤.\int \frac{١ - جتا٢س}{٢}.دس = -٢.\left[س - \frac{جا٢س}{٢}\right] + جـ$$

وبطريقة أخرى يمكن فرض س= ٢. ظا(قطع)س $دس = \frac{٢}{جتا^{٢}(قطع)ت}.دت$

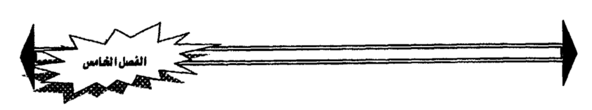
ويصبح بالتالي:

$$ص_{١} = \int \sqrt{٤ - ٤ظا^{٢}(قطع)ت}.\frac{٢}{جتا^{٢}(قطع)ت}.دت = ٤.\int \frac{دت}{جتا^{٣}(قطع)ت}$$

هو تكامل قطعي ينطبق عليه حالة ح(جا(قطع)ت، -جتا(قطع)ت)= -ح(جا(قطع)ت، جتا(قطع)ت)

وبالتالي سنفرض أن جا(قطع)ت= $\tau \Longrightarrow d\tau$ = جتا(قطع)ت. دت





$ص_1 = \int \frac{دτ}{(1+τ^2)^2}$ والأخير تكامل كسري.

٢- من أجل $ص_2 = \int \sqrt{1+س^2}\,.س.دس$ سنفرض أن س= ظات

$دس = \frac{دت}{جتا^2ت}$

وبالتالي: $ص_2 = \int ظات . \frac{1}{جتا^2ت} . دت = \int \frac{جات}{جتا^4ت} . دت$

سنفرض هناك جتات= τ ⟸ دτ= −جات. دت

$ص_2 = -\int \frac{دτ}{τ^4} = -\int τ^{-4} . دτ = -\left[\frac{τ^{-3}}{-3}\right] + جـ = \frac{1}{3τ^3} + جـ$

وبطريقة أخرى سنفرض أن:

س= جا(قطع)ت ⟸ دس= جتا(قطع)ت. دت

$ص_2 = \int$ جا(قطع)ت. جتا(قطع)ت. جتا(قطع)ت.دت

$\int$ جا(قطع)ت. $جتا^2$(قطع)ت .دت

ويصبح $ص_2 = \int τ^2 دτ = \frac{τ^3}{3} + جـ$

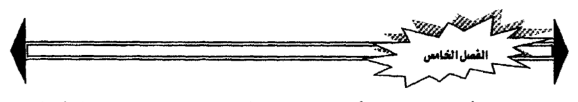
٣- من أجل التكامل $ص_3 = \int \frac{دس}{\sqrt{س^2-1}}$

سنفرض أن $س = \frac{1}{جتات}$ ⟸ $دس = \frac{جات}{جتا^2ت} دت$

ويصبح لدينا $ص_3 = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{جتا^2ت} - 1}} . \frac{جات}{جتا^2ت} . دت$

$= \int \frac{جتات}{جات} . \frac{جات}{جتا^2ت} دت = \int \frac{دت}{جتات} = \frac{1}{2} . لو_ه \left(\frac{ظا1/2-1}{ظات/2+1}\right) + جـ$





وبطريقة أخرى سنفرض أن س= جتا(قطع)ت ⟸ دس= جا(قطع)ت. دت

عندئذ يصبح لدينا $ص_٢ = ∫ \frac{جا(قطع)ت.دت}{جا(قطع)ت} = ∫دت = ت + جـ$

أخيراً سنورد التعميم التالي:

يمكن في الواقع رد أي تكامل من الشكل $∫ق(\sqrt{س^٢ + يس + ل})دس$ وذلك بإكمال المربع داخل الجذر بالشكل $س^٢ + يس + \frac{ي^٢}{٤} + ل - \frac{ي^٢}{٤}$

$$= \left(س + \frac{ي}{٢}\right)^٢ + \left(ل - \frac{ي^٢}{٤}\right)$$

فإذا أجرينا تغييراً للمتحول $ت = س + \frac{ي}{٢}$ ⟸ دت= دس

سيرد عندها هذا التكامل إلى أحد الشكلين:

إما $∫ق(\sqrt{ت^٢ - م^٢})دت$ أو $∫ق(\sqrt{ت^٢ + م^٢})دت$

تمارين عامة

التكامل غير المحدد

السؤال الأول:

أوجد التابع الأصلي لكلاً من التوابع التالية:

١- $ق(س)=\frac{قوس ظاس}{١+س^{٢}}$

٢- $ق(س)=\frac{قوس جات}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

٣- $ق(س)=س^{٢}.\ لو_{هـ}س^{٢}$

٤- $ق(س)=س.جا(قطع)\frac{س^{٢}}{٣}$

٥- $ق(س)= س.\ جاس + س^{٢}$

٦- $ق(س)=\frac{س}{١-س^{٢}}+\frac{١}{٥-س^{٢}}$

٧- $ق(س)=س\ \ جتاس+ لو_{هـ}س$

السؤال الثاني: أوجد التكاملات الكسرية:

١- $\int\frac{(س-١)^{٢}}{(س^{٢}-١)س}.دس$

٢- $\int\frac{س^{٣}+١}{(س^{٤}-١)(س^{٢}+١)}.دس$

٣- $\int\frac{س-٢}{(س^{٢}+س+٥)(س^{٢}+١)}دس$

٤- $\int\frac{س^{٢}-٢}{(س-١)^{٢}(س^{٢}+س)}.دس$

٥- $\int\frac{س-١}{(س^{٣}+س)(س^{٢}-١)}دس$

٦- $\int\frac{دس}{(س^{٢}+س+١)^{٣}}$

٧- $\int\frac{دس}{(س^{٢}-س+١)^{٢}}$

٨- $\int\frac{دس}{(٢س^{٢}+٢)(٥س-٢)}$

٩- $\int\frac{س^{٢}+٢س+٢}{س^{٤}-١}دس$

١٠- $\int\frac{س^{٥}+١}{س^{٢}+١}.دس$

١١- $\int \frac{س^{٣}+٢س+١}{س^{٣}+٥}.دس$ ١٢- $\int \frac{س^{٢}-١}{س^{٢}+٥}.دس$

السؤال الثالث: أوجد كلاً من التوابع الصماء التالية:

١- $\int \frac{\sqrt{س+١}+٥}{\sqrt[٥]{س+١}+٢}.دس$ ٢- $\int \frac{(٢س+٥)^{٢/٣}+(٢س+٥)^{١/٤}}{(٢س+٥)^{٢/٧}.س}.دس$

٣- $\int \frac{س.دس}{\sqrt{س^{٢}+س-١}}$ ٤- $\int \frac{س^{٢}+٢.دس}{(س-١)\sqrt{س^{٢}+٢س+١}}$

٥- $\int \frac{س^{٢/٣}.دس}{س^{٤/٥}+٣س^{٧/٢}}$ ٦- $\int \frac{(٢س-١)دس}{\sqrt{س^{٢}+٣س+٢}}$

السؤال الرابع:

عين كلاً من تكاملات ثنائي الحد التفاضلي التكاملات القابلة للمكاملة ثم أوجد تابعها الأصلي؟

١- $\int س^{٢}(١+س^{٢/٣})^{٤/٥}.دس$ ٢- $\int س^{٢/٣}(١+س^{٤/٣})^{٢}.دس$

٣- $\int س^{٥/٢}(١+س^{٥/٧})^{٢/٣}.دس$ ٤- $\int س^{٤/٣}(١+س^{٥})^{٢/٥}.دس$

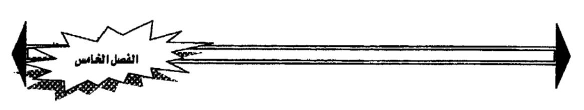
٥- $\int س^{٧/٣}(١+س^{٣/٢})^{٤/٥}.دس$ ٦- $\int س^{٣/٢}(١+س^{٣/٤})^{١/٢}.دس$

٧- $\int س^{٢/٣}(١+س^{١/٣})^{\frac{١}{٢}}.دس$

السؤال الخامس: عين فيما يلي إذا كانت التكاملات المثلثية قابلة للمكاملة وأوجد تابعها الأصلي؟

١- $\int جا^{١/٢}س.\ جتا^{٣}س.دس$ ٢- $\int جا^{٣}س.\ جتا^{٥/٤}س.دس$





٣- $\int \text{جا}^{٢/٧}\text{س} \ \text{جتا}^{٢/١}\text{س.دس}$ ٤- $\int \text{جا}^{٢/١}\text{س.} \ \text{جتا}^{٢/١}\text{س.دس}$

السؤال السادس: أوجد التكاملات المثلثية التالية:

١- $\int \frac{\text{دس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$ ٢- $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢ - \text{جتاس}}$

٣- $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا(س} + ٥)}$ ٤- $\int \frac{\text{جا٢س. جتا٣س}}{\text{جا٤س}}\text{.دس}$

٥- $\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{٥ جتا٢س} + ١}\text{.دس}$ ٦- $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\text{.دس}$

٧- $\int \sqrt{\text{جاس}}\text{. جتاس.دس}$ ٨- $\int \text{جا٥س. جتاس دس}$

٩- $\int \frac{\text{جا٣س} + \text{جا٢س}}{\text{جتاس} + ١}\text{.دس}$ ١٠- $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{جاس}} + \text{جتا}^{٢}\text{س}}$

١١- $\int \text{جا}^{٢/٣}\text{س. جتاس.دس}$ ١٢- $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}$

السؤال السابع: أوجد التكاملات القطعية التالية:

١- $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا(قطع)س} + ١}$ ٢- $\int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س} + ٥}$

٣- $\int \frac{\text{جا(قطع)س. جتا(قطع)س}}{\text{جا}^{٢}\text{(قطع)س}}$ ٤- $\int \text{جا}^{٢/٣}\text{(قطع)س. جتا}^{٢}\text{(قطع)س.د س}$

٥- $\int \text{جا}^{٥}\text{(قطع)س. جتا}^{٣}\text{(قطع)س.دس}$

٦- $\int \frac{\text{جا(قطع)س}}{\text{جا}^{٢}\text{(قطع)س} + \text{جتا}^{٢}\text{(قطع)س}}\text{دس}$



٧- $\int \frac{\text{جتا(قطع)س} - \text{جا(قطع)س}}{\text{جا}^{٢}\text{(قطع)س}} \text{دس}$

٨- $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{(قطع)س}}{\text{جتا(قطع)س.جا}^{٣}\text{(قطع)س}} \text{دس}$

٩- $\int \text{جتا}^{٥}\text{(قطع)س.دس}$

١٠- $\int \frac{\text{جا(قطع)س}^{٢}}{\text{جتا(قطع)س}^{٢}+١} \text{.س.دس}$

السؤال الثامن:

أوجد عن طريق التبديلات المثلثية أو القطعية المناسبة في التكامل التالي:

$\int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\,\text{دس}$

السؤال التاسع: اقترح طريقة لحل التكاملات التالية:

١- $\int \text{س. قوس ظاس.دس}$

٢- $\int (\text{قوس جاس})^{\text{ن}}\text{.دس}$

٣- $\int \text{هـ}^{\text{قوس جاس}}\text{.دس}$

٤- $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)\text{.دس}$

٥- $\int \frac{\text{هـ}^{\text{قوس ظاس}}}{١+\text{س}^{٢}}\text{.دس}$

٦- $\int \text{س}^{٢}\text{. قوس جاس.دس}$

٧- $\int \text{س}^{٣}\text{.هـ}^{\text{س}}\text{.دس}$

٨- $\int \frac{\text{س}+١}{\text{هـ}^{\text{س}-١}}\text{.دس}$

٩- $\int \text{قوس ظا}(\text{هـ}^{\text{س}})\text{.دس}$

١٠- $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\text{.س}^{٢}\text{.دس}$

الرياضيات



9789957247102



دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
المملكة الأردنية الهاشمية - عمّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net